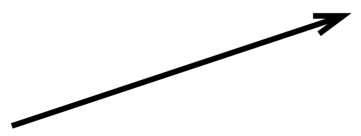
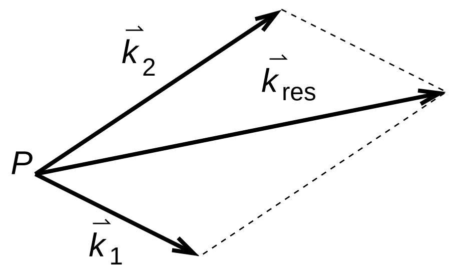
Vektorrechnung

Vektorielle Größen in der Physik: Skalaren Größen wie Zeit, Masse, Energie oder Temperatur werden in der Physik mit einer Maßzahl und einer Maßeinheit angegeben: 7 sec, 4.5 kg. Wichtige physikalische Gößen haben jedoch einen Betrag und eine Richtung: Z.B. Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung. Diese vektoriellen Größen werden durch einen Pfeil dargestellt, dessen Länge den Betrag der Größe angibt:



Das k-fache einer Kraft wird durch einen Vektor der k-fachen Länge dargestellt, die Gegenkraft durch einen Pfeil gleicher Länge in entgegengesetzter Richtung.

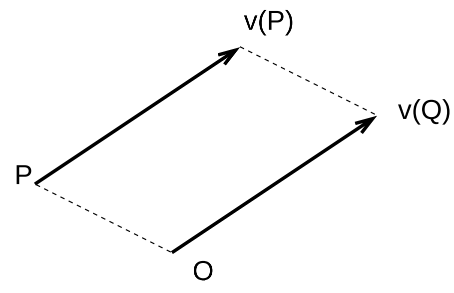
Greifen zwei Kräfte $\vec{k}_1$ und $\vec{k}_2$ in einem Punkt P an, dann wirken sie gemeinsam wie eine einzige im Punkt P angreifende Kraft:



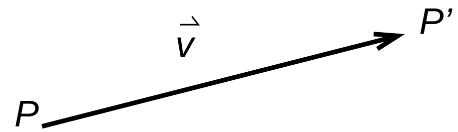
Die resultierende Kraft ergibt sich durch Paralellogrammkonstruktion. Umgekehrt lassen sich Kräfte genauso in Komponenten zerlegen.

Vektoren in der ebenen Geometrie

Eine Translation (Parallelverschiebung) in der euklidischen Ebene E ist eine Abbildung $v : E \to E$ die jeden Punkt um eine festgelegt Strecke in eine gegebene Richtung verschiebt. Vier Punkte P, Q, $v(P)$, $v(Q)$ bilden ein Parallelogramm:

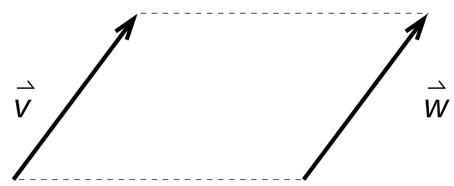


Eine Translation ist vollständig durch Angabe eines Punktes P und seines Bildes unter der Verschiebung $P' = v(P)$ beschrieben:



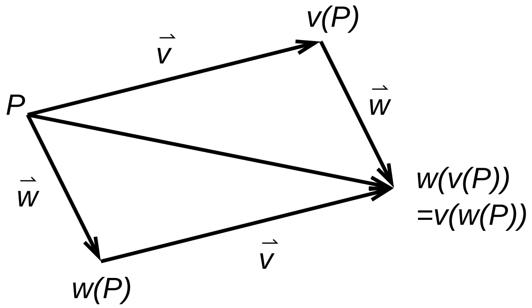
Man kann also sagen, P' entsteht aus P durch Anwendung von $\vec{v}$.

Man bezeichnet zwei Vektoren als gleich, wenn sie gleiche Länge und gleiche Richtung haben:



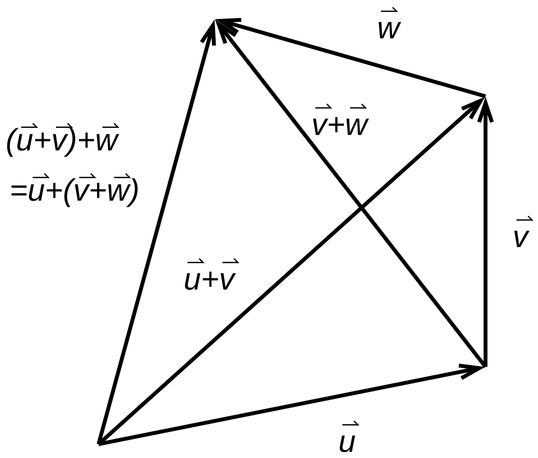
Dabei spielt der Anfangspunkt keine Rolle.

Die Hintereinanderausführung $w \circ v$ von zwei Translationen ist wieder eine Translation; den zugehörigen Translationsvektor ergibt die Parallelogrammkonstruktion:



Der Ergebnisvektor bezeichnen wir als $\vec{v}+\vec{w}$. Aus der Figur entnimmt man $w \circ v = v \circ w$ und damit $\vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v}$. Diese Eigenschaft heißt Kommutativität.

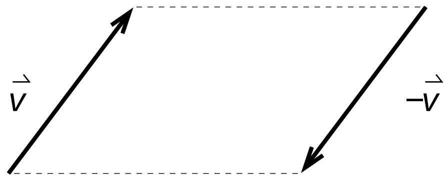
Geometrisch kann man auch die Eigenschaft der Assoziativität ablesen:



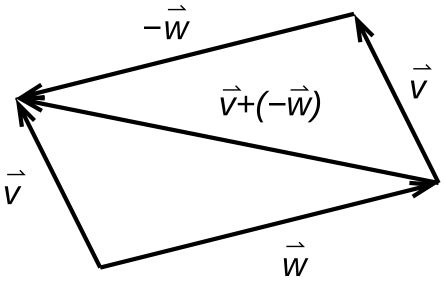
Also gilt $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

Die identische Abbildung, die jeden Punkt fest lässt, zählen wir auch zu den Translationen, und den zugehörigen Translationsvektor bezeichnen wir als Nullvektor $\vec{0}$ (hat als einziger Vektor keine Richtung).

Translationen sind umkehrbar; den Translationsvektor der Umkehrabbildung v^{-1} von v bezeichnet man mit $-\vec{v}$. Es gilt $\vec{v}+(-\vec{v}) = \vec{0}$. $-\vec{v}$ hat also gleiche Länge wie $\vec{v}$, aber entgegengesetzte Richtung.



Damit haben wir auch die Subtraktion von Vektoren eingeführt:



Also ist

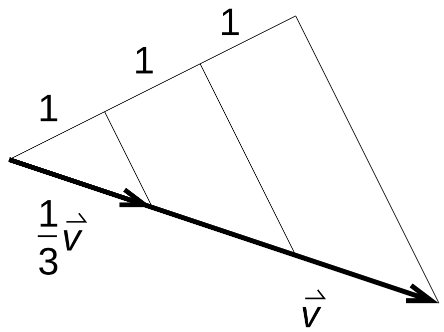
$$\vec{v}-\vec{w} = \vec{v}+(-\vec{w})$$

Den Vektor $\vec{v}+\vec{v}$ bezeichnen wir mit $2\cdot\vec{v}$; er hat (für $\vec{v} \neq 0$) die doppelte Länge von $\vec{v}$, aber dieselbe Richtung. Entsprechend soll

$$3\cdot\vec{v} = 2\cdot\vec{v}+\vec{v} = \vec{v}+2\cdot\vec{v}$$

sein, und $n\cdot\vec{v}$ entspricht der n-fachen Ausführung der Translation v.

Geometrisch können wir auch den Vektor $\frac{1}{3}\cdot\vec{v}$ konstruieren:



Nach Konstruktion ist

$$3\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\vec{v}\right) = \vec{v}$$

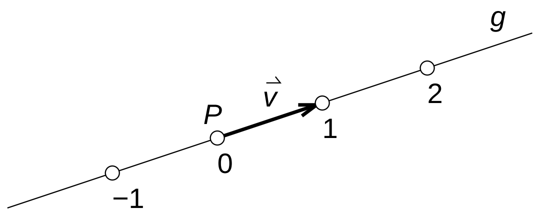
Entsprechend definieren wir $\frac{1}{m} \cdot \vec{v}$ für $m \in \mathbb{N}$.

Schließlich definieren wir

$$\frac{n}{m} \cdot \vec{v} := n \cdot \left(\frac{1}{m} \cdot \vec{v} \right)$$

und haben damit einen Vektor mit der Richtung von $\vec{v}$ aber mit der $\frac{n}{m}$-fachen Länge.

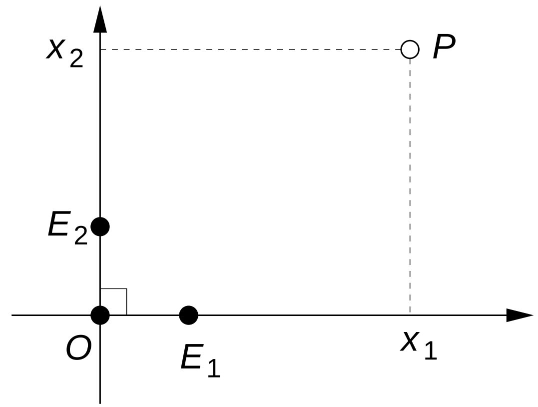
Allgemein verstehen wir für $c \in \mathbb{R}^+$ unter $c \cdot \vec{v}$ einen Vektor gleicher Richtung wie $\vec{v}$, aber c-facher Länge; $(-c) \cdot \vec{v}$ soll der Gegenvektor $-(c \cdot \vec{v})$ sein. Außerdem setzen wir $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$. Damit entspricht jeder Zahl $t \in \mathbb{R}$ ein Punkt der Geraden g, die durch Antragen von $t \cdot \vec{v}$ and den Punkt P entsteht:



Umgekehrt entspricht jedem $Q \in g$ eindeutig ein Parameterwert $t \in \mathbb{R}$ mit $\vec{PQ} = t \cdot \vec{v}$. Bei dieser Parametrisierung entsprechen sich die Punkte von g und die reellen Zahlen in eindeutiger Weise.

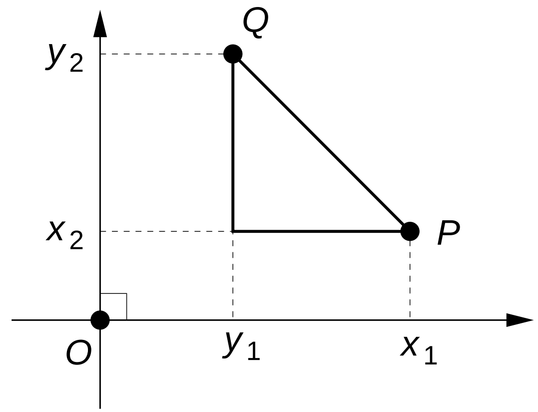
Koordinatendarstellung von Punkten und Vektoren

Kartesisches Koordinatensystem: In der euklidischen Ebene E zeichnen wir einen Punkt O, den Nullpunkt oder Ursprung, aus. Durch diesen legen wir eine gerade g_1, die erste Koordinatenachse und wählen auf ihr im Abstand 1 vom Ursprung O einen Einheitspunkt E_1. Dann ziehen wir durch O senkrecht zu g_1 eine zweite Gerade g_2, die zweite Koordinatenachse und wählen auf ihr einen Einheitspunkt E_2 im Abstand 1 vom Ursprung O:



Jetzt können wir jedem Punkt P von E ein Koordinatenpaar (x_1, x_2) zuordnen. Wir schreiben $P = (x_1, x_2)$, machen also keinen Unterschied zwischen dem Punkt und seinem Koordinatenpaar.

Den Abstand zweier Punkte $P = (x_1, x_2)$ und $Q = (y_1, y_2)$ können wir aus der Figur bestimmen:



$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

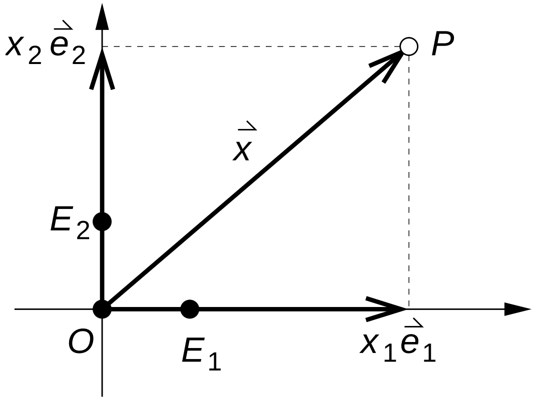
Koordinatendarstellung von Vektoren: Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem in der Ebene und halten es im Folgenden fest. Ist $\vec{x}$ ein Vektor, dann können wir ihn im Ursprung angreifen lassen und erhalten einen Punkt

$$P = (x_1, x_2) \quad \text{mit} \quad \vec{x} = \vec{OP}$$

Wir beschreiben $\vec{x}$ durch die Koordinatenspalte

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Die Spaltenschreibweise ist schon ein Vorgriff auf die Matrizenrechnung.



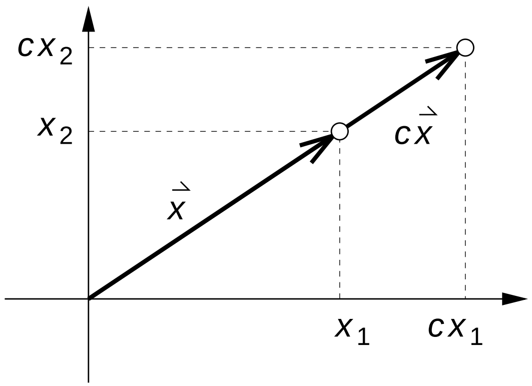
Aus der Figur entnimmt man, dass

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$

mit $\vec{e}_1 = \vec{OE_1}$ und $\vec{e}_2 = \vec{OE_2}$. Für die Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ schreiben wir in Koordinatenschreibweise

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt müssen wir das Vielfache $c \cdot \vec{x}$ und die Hintereinanderausführung $\vec{x} + \vec{y}$ in Koordinaten ausdrücken.



Aus der Figur entnehmen wir mit Hilfe des Strahlensatzes, dass das c-fache des Vektors $\vec{x}$ die Koordinatendarstellung

$$c\vec{x} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix}$$

hat. Damit finden wir für den Nullvektor die Koordinatenschreibweise

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

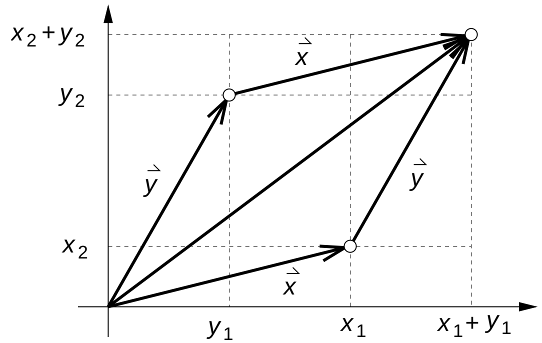
und das Inverse des Vektors $\vec{x}$ ist

$$-\vec{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Für die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ mit Koordinatenspalten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

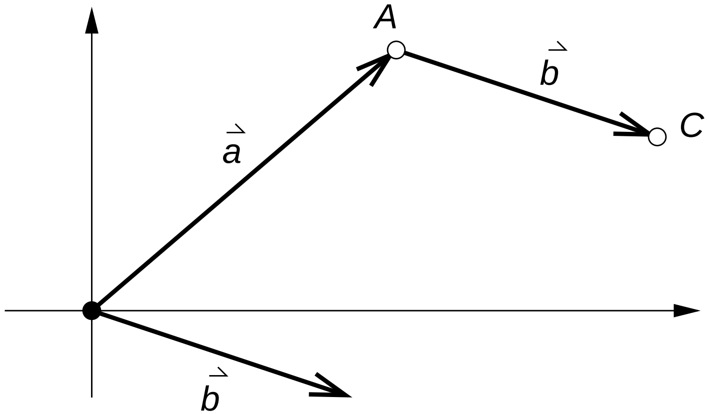
finden wir durch Parallelogrammkonstruktion:



Also ist

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

Punkte und Vektoren: Punkte und Vektoren in der Ebene sind prinzipiell verschiedene Dinge. Sie sind aber durch den Begriff des Ortsvektors miteinander verbunden. Ist $A = (a_1, a_2)$ ein Punkt der euklidischen Ebene und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ein Vektor, so entsteht der Punkt $C = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ aus A durch Anwendung von $\vec{b}$. Insbesondere entsteht A durch Anwendung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ auf den Ursprung $\vec{0}$.



$\vec{a}$ heißt Ortsvektor des Punktes A. Der Ortsvektor von C ist also $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Für die Vektorrechnung reicht es aus, statt des Punktes den Ortsvektor eines Punktes zu betrachten.

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit: Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen linear abhängig, wenn einer von ihnen ein Vielfaches des anderen ist. So sind $\vec{a} = (4, -6)$ und $\vec{b} = (-6, 9)$ linear abhängig, denn es gilt $\vec{b} = -\frac{3}{2}\vec{a}$ bzw. $\vec{a} = -\frac{2}{3}\vec{b}$.

$\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{0}$ sind linear abhängig, da $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}$. (Im Fall $\vec{a} \neq \vec{0}$ ist $\vec{a}$ aber kein Vielfaches von $\vec{0}$.) Wenn zwei Vektoren nicht linear abhängig sind, heißen sie linear unabhängig.

Satz: Zwei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

sind genau dann linear abhängig, wenn $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$.

Beweis:
a) $\vec{a} = c \cdot \vec{b} \curvearrowright a_1 = cb_1 \wedge a_2 = cb_2 \curvearrowright a_1 a_2 = ca_2 b_1 \wedge a_1 a_2 = ca_1 b_2 \curvearrowright a_2 b_1 = a_1 b_2 \forall c \neq 0$
b) Für $a_1 b_2 = a_2 b_1$ und $a_1 \neq 0$ ist $b_2 = \frac{b_1}{a_1} a_2 \wedge b_1 = \frac{b_1}{a_1} a_1 \curvearrowright \vec{b} = \frac{b_1}{a_1}\vec{a}$. Für $a_2 \neq 0$ folgt genauso $\vec{b} = \frac{b_2}{a_2}\vec{a}$. Für $a_1 = a_2 = 0$ ist $\vec{a} = 0 = \vec{0} \cdot \vec{b}$.

Vektorraumaxiome

Der Vektorraum $\mathbb{R}^2$: Damit haben wir aus geometrischen Überlegungen alle Eigenschaften abgeleitet, die einen Vektorraum charakterisieren. Die Vektoren

bilden im $\mathbb{R}^2$ (und übrigens unverändert auch im $\mathbb{R}^n$) bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe. Seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ Vektoren im $\mathbb{R}^2$, so gilt:

α)	$\vec{a} + \vec{b}$ ist ein Vektor im $\mathbb{R}^2$	innere Verknüpfung
β)	$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$	Assoziativität
γ)	$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$	Existenz eines neutralen Elements
δ)	$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$	Existenz eines Inversen
ε)	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	Kommutativität

Des weiteren haben wir schon die äußere Komposition kennengelernt: die Multiplikation eines Vektors im $\mathbb{R}^2$ mit einem Skalar (einer reellen Zahl) liefert wieder einen Vektor im $\mathbb{R}^2$. Seien $s, t \in \mathbb{R}$ und $\vec{a}$, $\vec{b}$ Vektoren im $\mathbb{R}^2$, so gilt

α)	$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$	Existenz eines neutralen Elements
β)	$(s+t)\vec{a} = s\vec{a} + t\vec{a}$	Distributivität
γ)	$t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$	Distributivität
δ)	$s(t\vec{a}) = (st)\vec{a} = t(s\vec{a})$	Assoziativität

Diese beiden Blöcke von Gesetzen heißen auch Vektorraumaxiome. Die Gesamtheit der Vektoren, die diese Gesetze erfüllen, bilden einen linearen Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Statt von der geometrischen Anschauung auszugehen, kann man die ganze Vektoralgebra auf diesen Axiomen aufbauen.

Betrag von Vektoren

In den Vektorraumaxiomen taucht die Länge eines Vektors $|\vec{a}|$ nicht explizit auf, sie braucht in einem abstrakten Vektorraum also auch nicht zu existieren. Für die Abbildung $\vec{a} \to |\vec{a}| \in \mathbb{R}^+$ des Betrages gelten die Gesetze:

α)	$\lvert\vec{a}\rvert \geq 0 \qquad \lvert\vec{a}\rvert = 0 \curvearrowright \vec{a} = \vec{0}$	
β)	$\lvert t\vec{a}\rvert = \lvert t\rvert \cdot \lvert\vec{a}\rvert \qquad t \in \mathbb{R}$	
γ)	$\lvert\vec{a} + \vec{b}\rvert \leq \lvert\vec{a}\rvert + \lvert\vec{b}\rvert$	Dreiecksungleichung

Existiert nun in einem Vektorraum eine Abbildung mit diesen Eigenschaften, so spricht man von einem Vektorraum mit Norm (normierter Vektorraum). Der Absolutbetrag von reellen Zahlen und der Betrag von Vektoren sind begrifflich dasselbe: Sie statten den zugrundeliegenden Raum mit einem Entfernungsbegriff aus, sodass dieser zu einem Spezialfall eines metrischen Raumes wird.

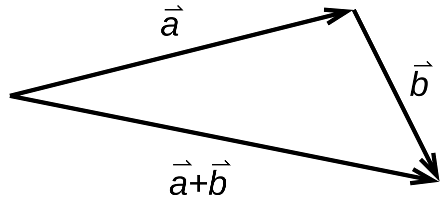
Wir verwenden für den Betrag eines Vektors die euklidische Norm: Der Betrag von $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist damit

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

und der Abstand zweier Punkte A, B ist der Betrag der Differenz der Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$d(A,B) = |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

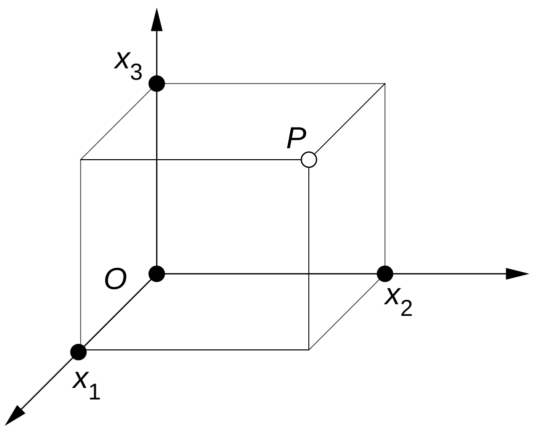
Die Dreiecksungleichung ist damit anschaulich klar:



Sie kann später leicht mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung bewiesen werden.

Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$

Vektoren im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$: Wir führen im dreidimensionalen euklidischen Raum ein kartesisches Koordinatensystem ein.



Dadurch können wir jeden Punkt P des Raumes durch sein Koordinatentripel (x_1, x_2, x_3) beschreiben, kurz $P = (x_1, x_2, x_3)$. Jede gerichtete Größe $\vec{x} = \overrightarrow{PP'}$ besitzt bezüglich dieses Koordinatensystems eine Koordinatendarstellung; $\vec{x}$ ist durch einen Koordinatenvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wie im $\mathbb{R}^2$ unterscheiden wir nicht zwischen dem Punkt $P = (x_1, x_2, x_3)$ und seinem Ortsvektor $\vec{x}$.

Rechnen mit Vektoren im $\mathbb{R}^n$: Wir definieren den n-dimensionalen Raum als

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Gleichheit von Vektoren:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$$

Addition von Vektoren und Multiplikation mit einem Skalar:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix}$$

Die Rechenregeln ergeben sich wie in $\mathbb{R}^2$ aus den Vektorraumaxiomen.

Zur geometrischen Interpretation: Geraden und Ebenen

Den n-dimensionalen Raum für $n > 3$ kann man sich zwar nicht vorstellen, aber dennoch lassen sich geometrische Zusammenhänge auf höhere Dimensionen übertragen.

Geraden: Ist $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ nicht der Nullvektor und ist $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, so beschreibt

$$g = \{\vec{a} + t\vec{v} | t \in \mathbb{R}\}$$

eine Gerade im Raum. Analog definiert man im $\mathbb{R}^n$ die Gerade durch $\vec{a}$ mit Richtungsvektor $\vec{v}$ durch

$$g = \{\vec{a} + t\vec{v} | t \in \mathbb{R}\}$$

Ebenen: Zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig, wenn keiner von ihnen ein Vielfaches des anderen ist.

Für linear unabhängige Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$E = \{\vec{a} + s\vec{u} + t\vec{v} \,|\, s, t \in \mathbb{R}\}$$

die von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannte Ebene durch den Punkt $\vec{a}$. Diese Darstellungen von Gerade und Ebene heißen Parameterdarstellung.

Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$: Wir führen jetzt für Vektoren ein inneres Produkt, das Skalarprodukt, und ein äußeres Produkt, das Vektorprodukt ein. Die reelle Zahl (Skalar)

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \quad \text{für} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

heißt Skalarprodukt. Es dient dazu, Winkel- und Längenmessung auf den $\mathbb{R}^n$ zu übertragen.

Die Eigenschaften des Skalarproduktes sind:

$\alpha)$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	Symmetrie (Kommutativität)
$\beta)$	$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$	Distributivität
$\gamma)$	$\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$	Bilinearität (Homogenität)
$\delta)$	$\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0 \qquad \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$	Positivität

Diese Eigenschaften lassen sich direkt aus der Definition des Skalarprodukts ablesen.

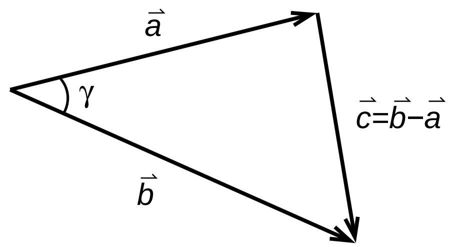
Der Betrag eines Vektors lässt sich nun als Wurzel aus dem Skalarprodukt des Vektors mit sich selbst darstellen:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Im euklidischen Raum können wir das Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{y}$ als Produkt der Beträge von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ und des Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren ausdrücken:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos \measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) \qquad 0 \leq \varphi = \measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) \leq \pi$$

Wir können das zeigen, indem wir die Differenz der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ betrachten:



Wegen des Kosinussatzes gilt für die Länge von $\vec{c}$, das dem Winkel γ gegenüberliegt:

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \gamma$$

Jetzt ersetzen wir die Betragsquadrate durch die Skalarprodukte

$$(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \gamma$$

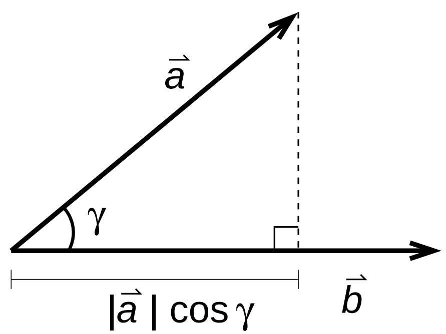
Aus den Rechenregeln des Skalarproduktes folgt dann

$$\vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \gamma$$

und damit

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \gamma$$

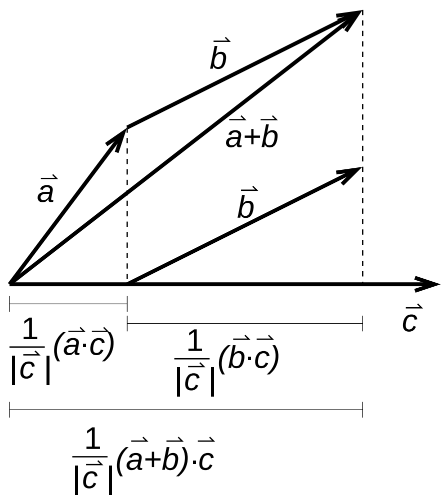
Für $\vec{b} \neq \vec{0}$ ist dann $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ die orthogonale Projektion des Vektors $\vec{a}$ auf die Richtung des Vektor $\vec{b}$:



Zwei nichtverschwindende Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ sind also genau dann orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt null ist:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \forall \quad \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$$

Mit dieser Interpretation des Skalarproduktes lässt sich das Distributivgesetz β) leicht geometrisch zeigen:



Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: Für $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ ist

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}|\le|\vec{x}||\vec{y}|$$

und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $\vec{x}$ und $\vec{y}$ linear abhängig sind.

Beweis:
a) Ist $\vec{y}=\vec{0}$, dann ist $|\vec{x}\cdot\vec{y}|=0=|\vec{x}||\vec{y}|$, und $\vec{x}$ und $\vec{y}$ sind linear abhängig.
b) Ist $\vec{y}\neq\vec{0}$, dann betrachten wir den Vektor

$$\vec{z}=\vec{x}-\frac{\vec{y}\cdot\vec{x}}{|\vec{y}|^2}\vec{y}$$

Es folgt direkt

$$\vec{z}\cdot\vec{y}=\vec{x}\cdot\vec{y}-\frac{\vec{y}\cdot\vec{x}}{|\vec{y}|^2}\vec{y}\cdot\vec{y}=0$$

Damit wird

$$0\le\vec{z}\cdot\vec{z}\le\vec{z}\cdot\left(\vec{x}-\frac{\vec{y}\cdot\vec{x}}{|\vec{y}|^2}\vec{y}\right)=\vec{z}\cdot\vec{x}-0=\left(\vec{x}-\frac{\vec{y}\cdot\vec{x}}{|\vec{y}|^2}\vec{y}\right)\cdot\vec{x}=$$

$$=\vec{x}\cdot\vec{x}-\frac{\vec{y}\cdot\vec{x}}{|\vec{y}|^2}\vec{y}\cdot\vec{x}=|\vec{x}|^2-\frac{|\vec{y}\cdot\vec{x}|^2}{|\vec{y}|^2}$$

also

$$0\le|\vec{x}||\vec{y}|-|\vec{y}\cdot\vec{x}|$$

Das Gleichheitszeichen tritt genau für $\vec{z}=\vec{0}$ auf, also für $\vec{x}=\lambda\vec{y}$ mit $\lambda=\frac{\vec{y}\cdot\vec{x}}{|\vec{y}|^2}\in\mathbb{R}$.

Unter den Eigenschaften der Norm eines Vektors haben wir schon die Dreiecksungleichung

$$|\vec{x}+\vec{y}|<|\vec{x}|+|\vec{y}|$$

kennengelernt. Sie folgt leicht aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}|\vec{x}+\vec{y}|^2&=(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\vec{x}\cdot\vec{x}+\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{y}\cdot\vec{x}+\vec{y}\cdot\vec{y}\\&\le|\vec{x}|^2+2|\vec{x}||\vec{y}|+|\vec{y}|^2=(|\vec{x}|+|\vec{y}|)^2\end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier genau dann, wenn $\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|$, also für $\vec{y}\neq\vec{0}$ wenn $\vec{x}=\lambda\vec{y}$.

Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$: Für die Vektoren

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\qquad\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

definieren wir das Vektorprodukt oder Kreuzprodukt durch

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

Merkhilfe der Physiker (unter Vorgriff auf Determinanten):

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x&\vec{e}_y&\vec{e}_z\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\vec{e}_x\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}-\vec{e}_y\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}+\vec{e}_z\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

Es gilt:
a) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $\vec{a}\times\vec{b}\neq0$.
b) Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig, so sind die zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$ senkrechten Vektoren gerade die Vielfachen von $\vec{a}\times\vec{b}$.
c) Für $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$ gilt

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2}$$

Beweis:
a) Wir zeigen: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann linear abhängig, wenn alle Determinanten

$$\Delta_1 = a_2b_3 - a_3b_2 \quad \Delta_2 = a_3b_1 - a_1b_3 \quad \Delta_3 = a_1b_2 - a_2b_1$$

Null sind.
Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig, also $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, dann folgt unmittelbar $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$.
Sei $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Ist $\vec{b} = \vec{0}$, so sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig. Ist $\vec{b} \neq \vec{0}$, z.B. $b_3 \neq 0$, dann folgt aus $\Delta_1 = 0$ und $\Delta_2 = 0$

$$a_2 = \frac{a_3}{b_3}b_2, \quad a_1 = \frac{a_3}{b_3}b_1, \quad \text{sowie ohnehin} \quad a_3 = \frac{a_3}{b_3}b_3$$

Also ist $\vec{a} = \frac{a_3}{b_3}\vec{b}$. Für $b_2 \neq 0$ ist genauso $\vec{a} = \frac{a_2}{b_2}\vec{b}$, für $b_1 \neq 0$ ist $\vec{a} = \frac{a_1}{b_1}\vec{b}$.

b) Dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zu $\vec{a} \times \vec{b}$ sind, folgt aus

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

Seien umgekehrt $\vec{x} \perp \vec{a}, \vec{x} \perp \vec{b}$. Da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind, ist eine der Determinanten Δ_1, Δ_2, Δ_3 von Null verschieden, z.B. $\Delta_3 \neq 0$. Die Bedingungen $\vec{x} \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{x} \cdot \vec{b} = 0$ lauten komponentenweise

$$\begin{array}{lcl} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 & \curvearrowright & a_1x_1 + a_2x_2 = -a_3x_3 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 & \curvearrowright & b_1x_1 + b_2x_2 = -b_3x_3 \end{array}$$

Lösen wir dieses Gleichungssystem mithilfe der Cramerschen Regel (für Gleichungssystem $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$ ist die Lösung $x_1 = (a_{22}b_1 - a_{12}b_2)/D, x_2 = (a_{11}b_2 - a_{21}b_1)/D$ falls $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$), so ergibt sich

$$x_1 = \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}x_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta_3}x_3, \qquad x_2 = \frac{a_3b_1 - a_1b_3}{a_1b_2 - a_2b_1}x_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta_3}x_3$$

und zusammen mit dem trivialen $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_3}x_3$ ergibt sich

$$\vec{x} = \frac{x_3}{\Delta_3}\vec{a} \times \vec{b}$$

Die Fälle $\Delta_1 \neq 0$ und $\Delta_2 \neq 0$ werden analog behandelt.

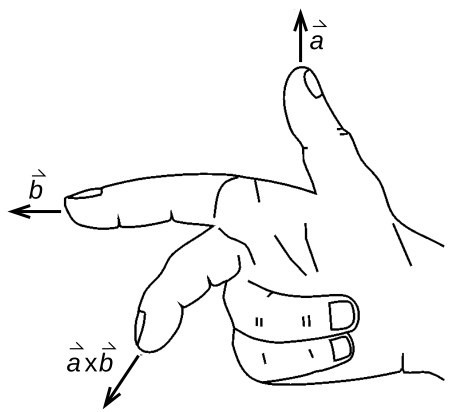
c)

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\varphi &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\varphi) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}\cdot\vec{b}|^2 \\ &= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\ &= a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 \\ &\quad - 2a_1b_2a_2b_1 - 2a_1b_3a_3b_1 - 2a_2b_3a_3b_2 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}|^2 \end{aligned}$$

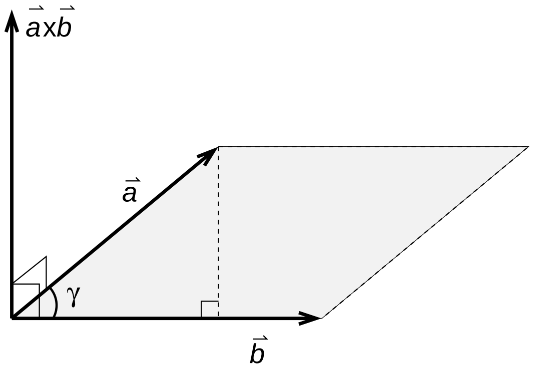
Beim Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ handelt es sich also um den Vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi\,\vec{e} \qquad 0 \leq \varphi = \measuredangle(\vec{a},\vec{b}) \leq \pi$$

wobei $\vec{e}$ ein Einheitsvektor ist, der so auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht, das $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{e}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden (wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand).



Geometrisch entspricht die Länge des Vektorprodukts $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$ der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:



Eigenschaften des Vektorproduktes:

α)	$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$	Schiefsymmetrie (Antisymmetrie)
β)	$(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\times\vec{c} = \lambda\vec{a}\times\vec{c}+\mu\vec{b}\times\vec{c}$ $\vec{a}\times(\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}) = \lambda\vec{a}\times\vec{b}+\mu\vec{a}\times\vec{c}$	Linearität in jedem Argument
γ)	$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$	Grassmannscher Entwicklungssatz
δ)	$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+$ $+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b} = 0$Jacobi-Identität	

α und β folgen direkt aus der Definition des Vektorproduktes, δ folgt leicht aus γ. γ ergibt sich durch Rechnung. Die linke Seite der Eigenschaft γ heißt doppeltes Vektorprodukt; γ wird als Entwicklungssatz für das doppelte Vektorprodukt bezeichnet, weil die rechte Seite (eine einfache Vektorsumme) eine deutliche Vereinfachung darstellt.

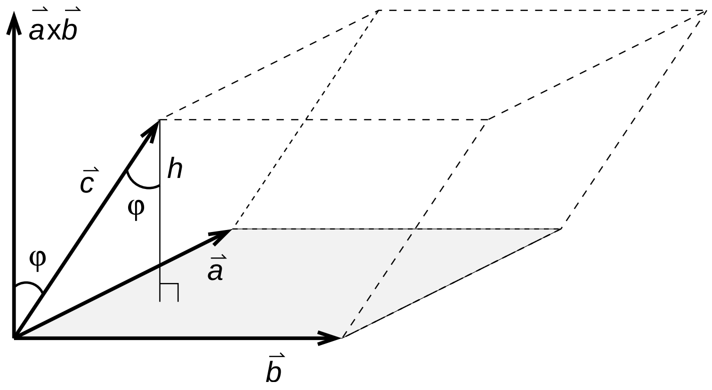
Vorsicht: Für das Vektorprodukt gilt kein Assoziativgesetz: $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\neq\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$. Wegen γ liegt der Vektor auf der linken Seite in der $(\vec{a},\vec{b})$-Ebene, der auf der rechten Seite in der $(\vec{b},\vec{c})$-Ebene.

Schließlich gibt es noch die Möglichkeit, das Vektorprodukt mit dem Skalarprodukt zu kombinieren: Das Produkt

$$V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

wird Spatprodukt genannt. Geometrisch entspricht sein Betrag dem Volumen des von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds; das folgt, wenn man das Volumen V des Parallelepipeds als Grundfläche $F = |\vec{a}\times\vec{b}|$ mal Höhe

$h = |\vec{c}|\cos\varphi$ berechnet:



Da es gleichgültig ist, welche Seite des Parallelepipeds wir als Grundfläche betrachten, ändert sich das Spatprodukt bei zyklischer Vertauschung der Vektoren nicht:

$$V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$$

Bei antizyklischer Vertauschung ändert V sein Vorzeichen.

$$V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c} = -(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}$$

Man bezeichnet es daher als Pseudoskalar.

Literatur:

Helmut Fischer, Helmut Kaul, *Mathematik für Physiker*, Band 1: Grundkurs, 5. Auflage, Teubner, Stuttgart 2005.

Wolfgang Nolting, *Grundkurs: Theoretische Physik, 1. Klassische Mechanik*, 3. Auflage, Verlag Zimmermann-Neufang, Ulmen 1993.

Gerhard Berendt, Evelyn Weimar, *Mathematik für Physiker*, Band 1 Analysis und Algebra, 2. Auflage, VCH, Weinheim 1990.