Inhaltsverzeichnis

1. Vektoranalysis

Wir verallgemeinern die Analysis einer reellen Veränderlichen auf Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad n > 1$$

Der Definitionsbereich ist also der $\mathbb{R}^n$, der Wertebereich ist zunächst $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

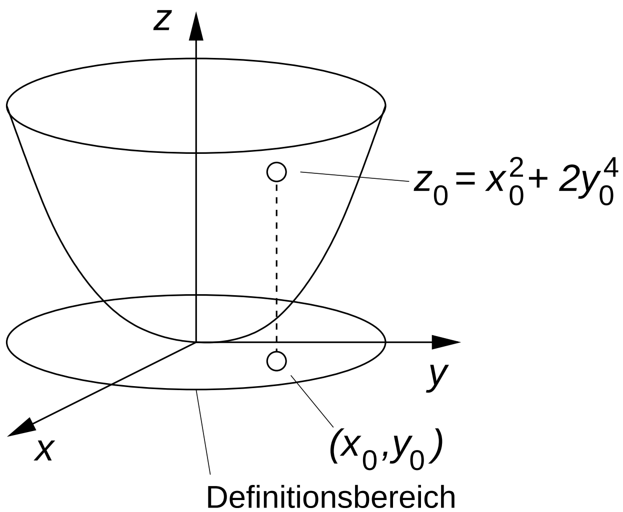
Definition Eine Abbildung $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (d.h. $\vec{x} \in G \curvearrowright f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$) heißt (reellwertige) Funktion von n reellen Veränderlichen.

Beispiel: $n = 2$

$$f : G = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}; x^2 + y^2 \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \in G \curvearrowright f(x, y) = x^2 + 2y^4 \in \mathbb{R}$$

Eine Funktion zweier reeller Variabler lässt sich noch bildlich im $\mathbb{R}^3$ darstellen; die Punkte $(x, y, z = f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$ bilden für alle $(x, y) \in G$ in einem rechtwinkligen dreidimensionalen Koordinatensystem i.A. eine Fläche:



Für $n > 2$ reicht der dreidimensionale Raum nicht mehr aus, den Funktionsverlauf geometrisch darzustellen. Wir stellen uns jedoch vor, dass eine Funktion von n reellen Veränderlichen ($n > 2$) entsprechend eine n-dimensionale Fläche im $\mathbb{R}^{n+1}$ liefert, die wir als Hyperfläche bezeichnen.

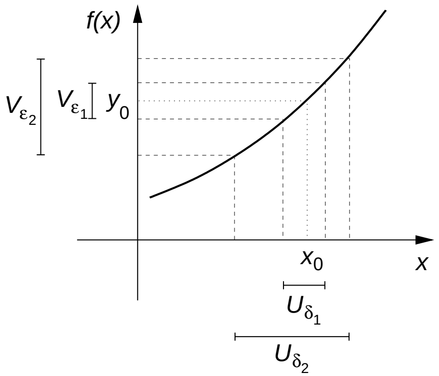
1.1 Stetigkeit

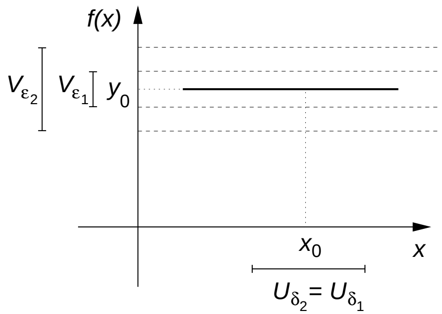
Definition Eine Abbildung $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt stetig im (inneren) Punkt $\vec{x} \in G$, wenn für jede ε-Umgebung $V_\varepsilon(y_0)$ $(\varepsilon > 0)$ des Bildpunktes $y_0 = f(\vec{x}_0)$ eine δ-Umgebung $U_\delta(\vec{x}_0)$ von $\vec{x}_0$ $[\delta = \delta(\vec{x}_0, \varepsilon) > 0]$ existiert mit

$$f[U_\delta(\vec{x}_0)] \subset V_\varepsilon(y_0 = f(\vec{x}_0))$$

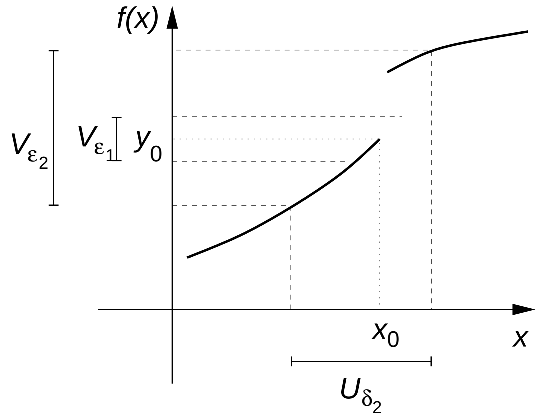
Dabei ist $V_\varepsilon(y_0)$ ein eindimensionales, $U_\delta(\vec{x}_0)$ ein n-dimensionales offenes Gebiet.

Beispiele für Stetigkeit (der Einfachheit halber für $n = 1$ gezeichnet):





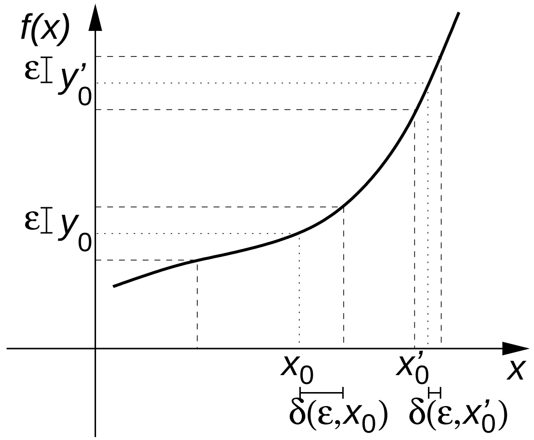
Beispiel für Unstetigkeit:



Wenn man die Umgebungen mithilfe der Norm ausschreibt, ergibt sich:

Definition $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt stetig im (inneren) Punkt $\vec{x} \in G$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\vec{x}_0, \varepsilon) > 0$ existiert, sodass

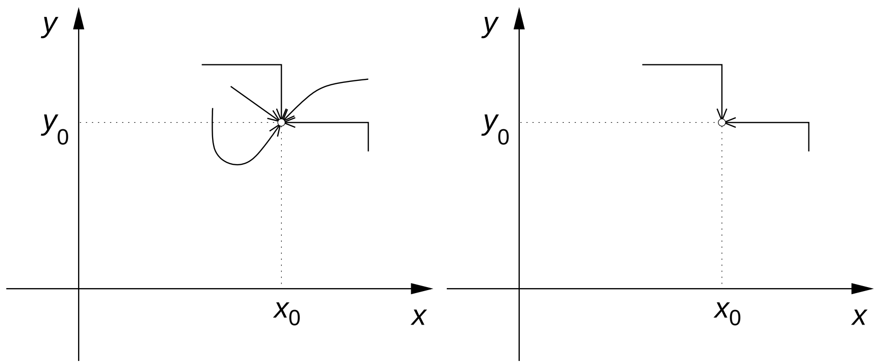
$$|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } \vec{x} \in G \text{ mit } \quad |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$$



Die Definition mit konvergenten Punktfolgen ist äquivalent:

Satz $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann im (inneren) Punkt $\vec{x}_0 \in G$ stetig, wenn für jede Folge $\vec{x}_j \xrightarrow{j\to\infty} \vec{x}_0 (\vec{x}_j \in G)$ gilt $f(\vec{x}_j) \xrightarrow{j\to\infty} f(\vec{x}_0)$ (oder kurz: wenn $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$ oder $f(\vec{x}) \xrightarrow{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}_0)$).

Allerdings gibt es im $\mathbb{R}^n$ mehr Freiheit bei der Annäherung an $\vec{x}_0$ mit einer konvergenten Folge an $\vec{x}_j$, denn wir können uns $\vec{x}_0$ von allen Richtungen nähern. Im $\mathbb{R}^2$ beispielsweise gibt es viele Möglichkeiten (Abb. links), aber wenn man sich an den $\mathbb{R}^1$ anlehnen will, bewegt man sich mit den Folgen am besten parallel zu den Achsen (Abb. rechts):



Für dieses Vorgehen gibt es aufgrund der Reihenfolge zwei Möglichkeiten, die sog. iterierten Limites:

$$\lim_{x\to x_0}\Big\{\lim_{\substack{y\to y_0\\ x \text{ fest}}} f(x,y)\Big\} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{y\to y_0}\Big\{\lim_{\substack{x\to x_0\\ y \text{ fest}}} f(x,y)\Big\}$$

Ist die Funktion in $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ stetig, dann müssen beide Limites übereinstimmen. Doch da Limites im Allgemeinen nicht vertauschbar sind, sind auch die iterierten Limites (falls sie existieren), im Allgemeinen nicht gleich.

Beispiel Wir betrachten die iterierten Limites der Funktion $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ im Punkt $(0,0)$.

$$\lim_{x\to 0}\Big\{\lim_{\substack{y\to 0\\ x\neq 0 \text{ fest}}} \frac{x-y}{x+y}\Big\} = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \qquad \lim_{y\to 0}\Big\{\lim_{\substack{x\to 0\\ y\neq 0 \text{ fest}}} \frac{x-y}{x+y}\Big\} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

Diese Funktion ist also im Punkt $(0,0)$ nicht stetig.

Wie in $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ definiert man

Definition $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt stetig in G, wenn f in jedem Punkt $\vec{x} \in G$ stetig ist.

Definition $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig in G, wenn für jedes $\vec{x} \in G$ gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$|f(\vec{x}\,') - f(\vec{x})| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad |\vec{x} - \vec{x}\,'| < \delta(\varepsilon)$$

Damit lassen sich Sätze über stetige Funktionen aus $\mathbb{R}$ auf Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher übertragen, z.B.
a) Jede Linearkombination $\alpha f(\vec{x}) + \beta g(\vec{y})$ von stetigen Funktionen f und g ist stetig.
b) Die Hintereinanderausführung von stetigen Funktionen ist stetig.
c) Das Produkt stetiger Funktionen ist stetig.

1.2 Partielle Ableitungen

Motivation bei der Definition der Differentiation ist, dass wir die Funktion $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ durch Polynome $P_l(x_1, x_2, ..., x_n)$ vom Grade l approximieren wollen:

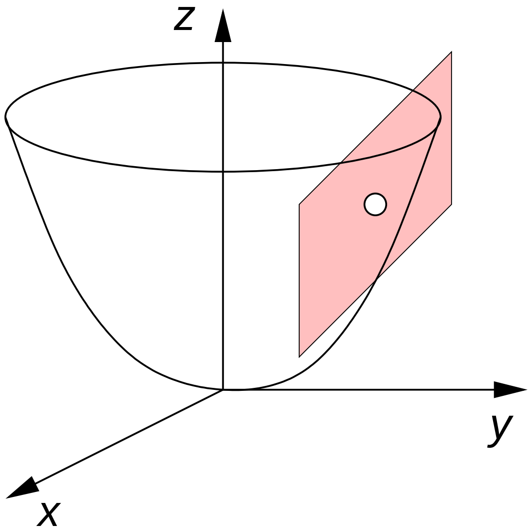
$$P_l(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\substack{i_1=0\\ }}^{l} \sum_{i_2=0}^{l} \cdots \sum_{\substack{i_n=0\\ i_1+i_2+...+i_n\leqslant l}}^{l} c_{i_1 i_2 \dots i_n}\, x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$$

Im ersten Schritt versuchen wir eine Approximation durch ein Polynom 1. Grades in den Variablen, also durch lineare Funktionen der Gestalt:

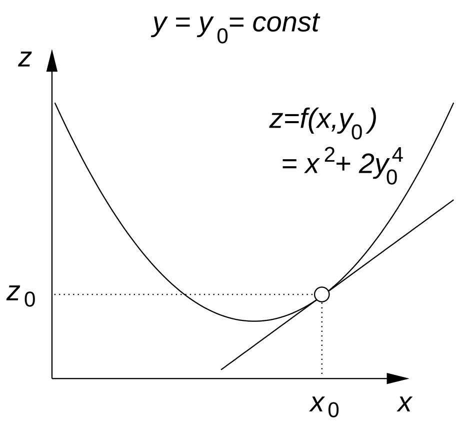
$$c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots c_n x_n \qquad c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, n$$

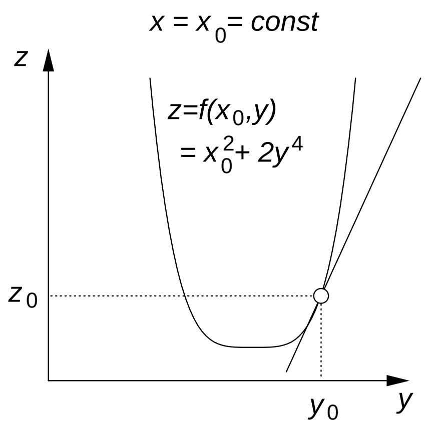
(Die weiteren Schritte führen zur Taylorschen Formel).

Geometrisch bedeutet die lineare Approximation im obigen Beispiel $f(x,y) = x^2 + 2y^4$ $(n = 2)$ das Aufsuchen der Tangentialebene. Die Tangentialebene in einem Punkt $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ besteht aus allen Tangenten, die man in $\vec{x}_0$ an die Fläche $\{(x, y, z = f(x,y) | x, y \in G\}$ im $\mathbb{R}^3$ anlegen kann.



Besonders einfach ist das, wenn wir bei der Bestimmung der Tangenten jeweils eine der beiden Variablen konstant halten.





Die beiden Tangenten im Punkt (x_0, y_0) lauten

$$z = f(x_0, y_0) + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}(x - x_0) \qquad h \neq 0$$

$$z = f(x_0, y_0) + \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}(y - y_0) \qquad k \neq 0$$

Die jeweils konstant gehaltene Variable spielt im Differentialprozess keine Rolle.

Die Ableitungen bezüglich einer Variablen bei Konstanthaltung aller anderen nennt man partielle Ableitungen und bezeichnet sie mit

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \qquad h \neq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \qquad k \neq 0$$

Allgemein definiert man:

Definition Sei $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion von n reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Unter der partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ im Punkte $\vec{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ versteht man den Limes

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big|_{\vec{x}_0} =$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}\Bigg|_{\vec{x}=\vec{x}_0}$$

Für die partielle Ableitung schreibt man kurz $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ oder f_{x_i}.

Beispiel: Sei $f(x, y) = 2x^3 + 3xy^2$, dann ist $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 3y^2$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy$.

Wir werden sehen, dass eine Funktion f von n reellen Veränderlichen eine Tangentialebene besitzt und damit differenzierbar ist, wenn f stetig partiell differenzierbar ist. Die Verallgemeinerung eines Satzes aus $\mathbb{R}$ lautet:

Satz Besitzt $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetige partielle Ableitungen in G, so ist f stetig im inneren Punkt $\vec{x}_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in G$.

Wir können jetzt zu höheren partiellen Ableitungen übergehen: Da $\partial f/\partial x$ eine neue Funktion von n reellen Variablen darstellt, können wir erneut nach den partiellen Ableitungen fragen. Man schreibt:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i} \quad \text{oder} \quad f_{x_i x_j}$$

bzw. für $i = j$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad \text{oder} \quad f_{x_i x_i}$$

Da es sich aber beim Differenzieren um einen Grenzprozess handelt, kommt es im Allgemeinen auf die Reihenfolge an, und es gilt i.A.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}$$

In vielen Anwendungen darf man dennoch die Differentiationsreihenfolge vertauschen, und zwar wegen des folgenden Schwarzschen Lemma:

Satz Besitzt $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetige zweite partielle Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ in G, so gilt in einem inneren Punkt $\vec{x}_0 \in G$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}$$

Der Beweis wird mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung geführt.

Beispiel: $f(x, y) = 2x^3 + 3xy^2$, $f_x = 6x^2 + 3y^2$ und $f_y = 6xy$, $f_{xy} = 6y = f_{yx}$.

1.3 Differentialoperatoren

In $\mathbb{R}$ kann man einen Differentialoperator D definieren, der einer Funktion f ihre Ableitung f' zuordnet, d.h.

$$\mathrm{D} = \frac{d}{dx} : \{f : I \to \mathbb{R} | f \text{differenzierbar}\} \to \{g : I \to \mathbb{R}\}, f \to \mathrm{D}f = \frac{d}{dx} f = f'$$

Die Ableitungregeln führen dann zu Rechenregeln für den Differentialoperator:
i) $\mathrm{D}(af + bg) = a \cdot \mathrm{D}f + b \cdot \mathrm{D}g$
ii) $\mathrm{D}(f \cdot g) = (\mathrm{D}f) \cdot g + f \cdot \mathrm{D}g$

Im $\mathbb{R}^n$ gibt es dann n Differentialoperatoren

$$\mathrm{D}_1 = \mathrm{D}_{x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \mathrm{D}_2 = \mathrm{D}_{x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \mathrm{D}_n = \mathrm{D}_{x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n}$$

$$\mathrm{D}_i = \mathrm{D}_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad , i = 1, 2, \ldots, n$$

mit den Eigenschaften
1) D_i linear: $\mathrm{D}_i(c_1 f + c_2 g) = c_1 \mathrm{D}_i f + c_2 \mathrm{D}_i g$, $c_1, c_2 = \text{const.}$
2) D_i vertauschbar: $\mathrm{D}_i \circ \mathrm{D}_j = \mathrm{D}_j \circ \mathrm{D}_i$ falls f stetige gemischte partielle

Ableitungen besitzt.
Daher kann man mit den D_i oft genauso rechnen wie mit Skalaren, z.B.

$(c_1 \mathrm{D}_i + c_2 \mathrm{D}_j)^2 = c_1^2 \mathrm{D}_i^2 + c_2^2 \mathrm{D}_j^2 + c_1 c_2 \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j + c_1 c_2 \mathrm{D}_j \mathrm{D}_i = c_1^2 \mathrm{D}_i^2 + c_2^2 \mathrm{D}_j^2 + 2 c_1 c_2 \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j$

Im $\mathbb{R}^3$ fasst man die drei Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ gern zu einem Vektor

$$\vec{\nabla} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{\nabla} := \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \mathrm{D}_i$$

zusammen, der Nabla genannt wird. Die i-te Komponente dieses Vektors ist also keine Zahl, sondern der Differentialoperator D_i.

$\vec{\nabla}$ lässt sich auf jede partiell differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ anwenden. Das Ergebnis ist der sog. Gradient von φ

$$\mathrm{grad}\varphi := \vec{\nabla}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{\nabla}\varphi := \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

1.4 Landau-Symbole

Eine nützliche Notation bei der Diskussion von Grenzprozessen sind die Landau-Symbole $O(1)$ (groß O von 1) und $o(1)$ (klein o von 1). Beide geben Größenordnungen an, und zwar:
$f \in O(g)$: f wächst höchstens so schnell wie g, g ist asymptotische obere Schranke für f
$f \in o(g)$: f wächst langsamer als g, ist asymptotisch vernachlässigbar gegen g

Damit steht $O(1)$ für eine Größe, die beschränkt bleibt, und $o(1)$ für eine, die gegen Null konvergiert. Für den Grenzprozess $x \to x_0$ gilt

$$\lim_{x \to x_0} o(1) = 0, \quad |O(1)| \leqslant M \text{ mit } M > 0 \text{ beschränkt für } x \to x_0$$

Für genauere Beschreibung des Verhaltens verwendet man dann

$$o(f(x)) \equiv f(x) \cdot o(1) \quad \text{und} \quad O(f(x)) \equiv f(x) \cdot O(1)$$

Mit dem Symbol o kann man jetzt die Differenzierbarkeit einer Funktion $f : I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt fassen:

Satz $f: I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $x_0 \in I$, wenn für alle $x \in I$ ein $f'(x_0)$ existiert mit

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)$$

Daran sieht man deutlich, dass Differenzierbarkeit mehr bedeutet als nur Stetigkeit, denn für Stetigkeit ist nur erforderlich

$$f(x) - f(x_0) = \underset{x \to x_0}{o}(1)$$

während für die Differenzierbarkeit dieses $o(1)$ die spezielle Form

$$\underset{x \to x_0}{o}(1) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)$$

besitzen muss.

1.5 Das Differential

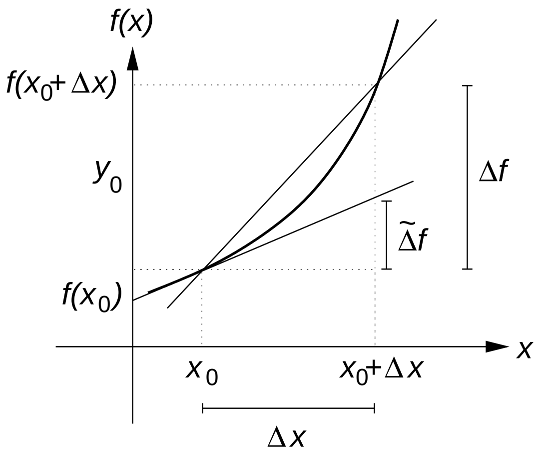
df

In der Physik ist der Begriff des Differentials df unentbehrlich. Zunächst führen wir wie folgt den Zuwachs Δf einer Funktion ein:

$$\Delta f(x_0, \Delta x) := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Dann gilt

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$$



Nun könnte man meinen, df sei $\lim_{x \to x_0} \Delta f$ und dx sei $\lim_{x \to x_0} \Delta x$, aber diese beiden Limites verschwinden. Stattdessen gilt (siehe Abbildung)

$$f'(x_0) = \frac{\tilde{\Delta} f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$$

für jedes $\Delta x \neq 0$, wobei $\tilde{\Delta} f$ den Zuwachs der Tangente

$$\tilde{\Delta} f(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\Delta x$$

darstellt. Diesen Ausdruck bezeichnet man jetzt als Differential der Funktion f und schreibt

$$\mathrm{d}f(x_0, \Delta x) := f'(x_0)\Delta x$$

Die Ableitung von f muss also bereits bekannt sein, um das Differential zu bilden. Dann lässt sich für jedes $\Delta x \neq 0$ die Ableitung an der Stelle x_0 als Quotient zweier endlicher Gößen schreiben:

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} \underset{\text{kurz}}{=} \frac{\mathrm{d}f}{\Delta x}(x_0)$$

Dabei kann Δx willkürlich, z.B. auch sehr groß gewählt werden - allerdings ist dann auch $\mathrm{d}f$ entsprechend groß.

Speziell für das Differential $\mathrm{d}f$ der identischen Funktion $f(x) = x, x \in I \subset \mathbb{R}$, das üblicherweise $\mathrm{d}x$ genannt wird, gilt wegen $f'(x) = 1$

$$\mathrm{d}x = 1 \cdot \Delta x$$

und man kann überall Δx durch $\mathrm{d}x$ ersetzen. Damit bekommt man den Differentialquotienten

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

mit einem normalen Bruch.

In der Physik geht man manchmal von einem kleinen Δx und dem zugeörigen Δf aus und nennt sie $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}f$. Ist $\Delta x \neq 0$ genügend klein, dann gilt, da die Sekante fast mit der Tangente übereinstimmt

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Daher ist diese Identifikation mit einiger Vorsicht erlaubt. Exakt gilt für festes $\Delta x \neq 0$

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\Delta f}{\Delta x} + o(1) = \frac{\Delta f + o(\Delta x)}{\Delta x}$$

also wegen $\Delta x = \mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}f(x_0, \Delta x) = \Delta f(x_0, \Delta x) + \underset{\Delta x \to 0}{o}(\Delta x)$$

Beispiel: Der Unterschied zwischen $\mathrm{d}f$ und Δf am Beispiel der Funktion $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$. Sei $\Delta x \neq 0$ beliebig vorgegeben, dann ist

$$\mathrm{d}f(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x = 2x_0 \cdot \Delta x$$

eine lineare Funktion in Δx. Dagegen besitzt

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

noch einen quadratischen Term in Δx.

1.6 Differential und Differenzierbarkeit

Jetzt kommen wir zu Differential und Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$. Zunächst gilt für ein $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, wobei wir f als stetig partiell differenzierbar annehmen:

$$\begin{aligned}\Delta f(x, y; \Delta x, \Delta y) &:= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\ &= \big[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)\big] + \big[f(x, y + \Delta y) - f(x, y)\big]\end{aligned}$$

Die partielle Differenzierbarkeit liefert

$$\Delta f = f_x(x, y + \Delta y)\Delta x + o(\Delta x) + f_y(x, y)\Delta y + o(\Delta y)$$

Die Stetigkeit von f besagt

$$f_x(x, y + \Delta y) = f_x(x, y) + \underset{\Delta y \to 0}{o}(1)$$

sodass folgt

$$\Delta f(x, y; \Delta x, \Delta y) = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + o(\Delta x) + o(\Delta y)$$

Daher definiert man als vollständiges Differential (totales Differential) $\mathrm{d}f$

$$\mathrm{d}f(x, y; \Delta x, \Delta y) := f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

Wieder gilt $\Delta x = \mathrm{d}x$ und $\Delta y = \mathrm{d}y$ und damit

$$\mathrm{d}f(x, y; \Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\mathrm{d}y$$

Allgemeiner definiert man

Definition Das (vollständige bzw. totale) Differential einer stetig partiell differenzierbaren Funktion $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wird definiert als

$$\mathrm{d}f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_i$$

oder kurz

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$$

Gilt $\mathrm{d}f \equiv 0$, so ist $f \equiv \text{const}$ (und umgekehrt).

Definition $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar im inneren Punkt $(x_1, \ldots, x_n) \in G$, wenn gilt

$$\Delta f(x_1, \ldots, x_n; \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)\Delta x_i + o(\Delta x_i)\right]$$

Satz Differenzierbarkeit bedeutet Existenz einer Tangentialebene und umgekehrt.

Die Ebenengleichung

$$g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{10}, \ldots, x_{n0}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{10}, \ldots, x_{n0})(x_i - x_{i0})$$

stellt die Approximationsebene (Tangentialebene) dar.

Wir haben gesehen, dass gilt

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} P_i(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_i \quad \text{mit} \quad P_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Oft ist nun in der Physik (z.B. 1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik, konservatives Kraftfeld) ein Ausdruck der Form

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_i$$

(Q_i stetig partiell differenzierbar) gegeben mit der Frage, wann dieser Ausdruck ein vollsändiges Differential ist, d.h. wann sich eine Funktion f finden lässt mit

$$Q_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Um die Antwort zu finden nehmen wir an, wir hätten ein solches f gefunden. Dann gilt, da Q_i stetig partiell differenzierbar,

$$\frac{\partial Q_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial x_i}$$

also

$$\frac{\partial Q_i}{\partial x_j} - \frac{\partial Q_j}{\partial x_i} = 0$$

Man nennt diese notwendigen Bedingungen zum Aufintegrieren der gegebenen differentielle Beziehung $\sum_{i=1}^{n} Q_i dx_i$ Integrabilitätsbedingungen. Man kann zeigen, dass diese bereits hinreichend sind, sodass man speziell für den $\mathbb{R}^2$ und den $\mathbb{R}^3$ findet:

Satz $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ seien stetig partiell differenzierbar. Dann ist $Pdx + Qdy$ genau dann ein vollständiges Differential, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

erfüllt ist.

Satz $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ und $R(x, y, z)$ seien stetig partiell differenzierbar. Dann ist $Pdx + Qdy + Rdz$ genau dann ein vollständiges Differential, wenn die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

erfüllt sind.

Ist $Pdx + Qdy$ kein totales Differential, d.h. wenn

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \neq 0$$

dann kann man meist (in höheren Dimensionen manchmal) einen sog. integrierenden Faktor $\mu(x, y)$ finden, sodass

$$\mu[Pdx + Qdy]$$

ein totales Differential ist.

Die Sätze über differenzierbare Funktionen einer reellen Variablen lassen sich jetzt unmittelbar auf solche von n reellen Variablen übertragen.

Satz Kettenregel: Sei $g : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar in $(y_1, \ldots, y_n) \in G$ und seien $f_i : G' \subset \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar in $(x_1, \ldots, x_n) \in G'$ mit

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = y_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Dann ist die zusammengesetzte Funktion

$$h : G' \subset \mathbb{R}^r \to \mathbb{R} \qquad h(x_1, \ldots, x_n) := g\big(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

stetig partiell differenzierbar in $(x_1, \ldots, x_n)$ mit

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \qquad j = 1, 2, \ldots, r$$

Für $r = 1$ gilt speziell

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x}$$

Satz (Mittelwertsatz): Sei $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig in einem abgeschlossenen Gebiet G und stetig partiell differenzierbar im Inneren von G. Dann gilt:

$$f(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 + \vartheta h_1, \ldots, x_n + \vartheta h_n)$$

mit $0 < \vartheta < 1$.

Satz (Taylorsche Formel): Sei $f : G \subset \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ n-mal stetig partiell differenzierbar und sei $f^{(n)}$ stetig im abgeschlossenen Gebiet G und stetig partiell differenzierbar im Inneren von G. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x_1 + h_1, \ldots, x_r + h_r) &= f(x_1, \ldots, x_r) \\ &+ \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_r \frac{\partial}{\partial x_r}\right) f(x_1, \ldots, x_r) + \\ &+ \frac{1}{2!}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_r \frac{\partial}{\partial x_r}\right)^2 f(x_1, \ldots, x_r) + \\ &\vdots \\ &+ \frac{1}{n!}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_r \frac{\partial}{\partial x_r}\right)^n f(x_1, \ldots, x_r) + R_n \end{aligned}$$

mit dem Restglied

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_r \frac{\partial}{\partial x_r}\right)^{(n+1)} f(x_1 + \vartheta h_1, \ldots, x_n + \vartheta h_n) \quad 0 < \vartheta < 1$$

Satz (Taylorsche Reihe): Ist f beliebig oft stetig partiell differenzierbar und gilt $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, so ergibt sich die Taylorreihe

$$f(x_1+h_1,\ldots,x_r+h_r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_r\frac{\partial}{\partial x_r}\right)^n f(x_1,\ldots,x_r)$$

1.7 Kurvenintegral (Linienintegral)

Eine Problemstellung, die uns öfter begegnen wird, ist die, ein skalares Feld $\varphi(\vec{x})$ oder ein Vektorfeld $\vec{a}(\vec{x})$ entlang einer Kurve C von einem Anfangspunkt A bis zu einem Endpunkt E zu integrieren, d.h. Kurvenintegrale

$$\int_C \varphi\, d\vec{x} \tag{1.1}$$

$$\int_C \vec{a}\cdot d\vec{x} \tag{1.2}$$

$$\int_C \vec{a}\times d\vec{x} \tag{1.3}$$

zu berechnen. Diese Integrale sind selbst (1.1) Vektoren, (1.2) Skalare und (1.3) Vektoren. Diese Art von Integral wird wie üblich auf Riemannsche Integrale, also auf den Grenzwert einer Summe zurückgeführt. Z.B. für (1.2) im $\mathbb{R}^3$ teilen wir die Kurve C von A nach B in Segmente $\Delta\vec{x}_i$, $i = 1, 2, ..., N$ ein. Wenn nun $\vec{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$ ein Punkt auf der Teilkurve $\Delta\vec{x}_i$ ist, dann gilt:

$$\int_C \vec{a}\cdot d\vec{x} = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\vec{a}(x_{i1},x_{i2},x_{i3})\cdot\Delta\vec{x}_i \qquad \text{mit } |\Delta\vec{x}_i|\to 0 \text{ für } N\to\infty$$

Auswertung

Wir werten Kurvenintegrale aus, indem wir sie auf gewöhnliche eindimensionale Integrale zurückführen. Angenommen, wir arbeiten in kartesischen Koordinaten, dann ist das Vektordifferential $d\vec{x} = dx_1\vec{e}_1 + dx_2\vec{e}_2 + dx_3\vec{e}_3$. Dann folgt aus Gl. (1.1)

$$\int_C \varphi\, d\vec{x} = \vec{e}_1\int_C \varphi(x_1,x_2,x_3)dx_1+\vec{e}_2\int_C \varphi(x_1,x_2,x_3)dx_2+\vec{e}_3\int_C \varphi(x_1,x_2,x_3)dx_3$$

Diese drei skalaren Integrale können ausgewertet werden, sobald die Kurve C bekannt ist. Wir konnten die Einheitsvektoren vor die Integrale ziehen,

da sie in kartesischen Koordinaten konstant sind (Vorsicht bei Kugel- oder Zylinderkoordinaten!).

Das Integral (1.2) wird

$$\int_C \vec{a}\cdot d\vec{x} = \int_C \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}dx_1\\dx_2\\dx_3\end{pmatrix} = \int_C a_1 dx_1 + \int_C a_2 dx_2 + \int_C a_3 dx_3$$

und ähnlich für Gl. (1.3).

Eigenschaften der Kurvenintegrale sind analog zu den skalaren Integralen:

$$\int_{A,C}^{B} \vec{a}\cdot d\vec{x} = -\int_{B,C}^{A} \vec{a}\cdot d\vec{x}$$

d.h. Integration entlang C in umgekehrter Richtung ändert das Vorzeichen.

Wenn P ein Punkt auf der Kurve zwischen A und B ist, dann gilt

$$\int_{A,C}^{B} \vec{a}\cdot d\vec{x} = \int_{A,C}^{P} \vec{a}\cdot d\vec{x} + \int_{P,C}^{B} \vec{a}\cdot d\vec{x}$$

Diese Eigenschaft ist wichtig, wenn wir entlang einer Kurve integrieren, auf der die Koordinaten keine eindeutige Funktionen voneinander sind, z.B. auf einem Kreis $x_1^2 + x_2^2 = R^2$. Dann kann man das Kurvenintegral stückweise durchführen (oder eine geeignete Parameterdarstellung verwenden, die für die ganze Kurve eindeutig ist).

Parameterdarstellung

Wenn die Kurve, entlang derer wir integrieren, in Parameterdarstellung $\vec{x}(u)$ gegeben ist, gilt für das Vektordifferential $d\vec{x}$

$$d\vec{x} = \frac{d\vec{x}}{du}du$$

und für das Kurvenintegral (1.2) folgt

$$\int_C \vec{a}\cdot d\vec{x} = \int_C \vec{a}\cdot\frac{d\vec{x}}{du}du$$

Ein häufig auftretender Spezialfall sind Kurvenintegrale bezüglich der Bogenlänge s: $\int_c \varphi ds$, $\int_c \vec{a} ds$. Dann folgt wegen

$$\frac{ds(u)}{du} = \left|\frac{d\vec{x}(u)}{du}\right|$$

für das Differential

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\frac{\mathrm{d}\vec{x}(u)}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{x}(u)}{\mathrm{d}u}}\mathrm{d}u$$

wobei der Parameter u, bezüglich dessen die Kurve parametrisiert ist, bespielsweise die Zeit t oder ein Winkel ϕ sind.

Beispiel: Auszuwerten sei das Integral $I = \int_C \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ mit $\vec{a} = (x_1 + x_2)\vec{e}_1 + (x_2 - x_1)\vec{e}_2$ von $A = (1, 1, 0)$ nach $B = (4, 2, 0)$ entlang der Kurven i) $x_2^2 = x_1$ und ii) $\vec{x}(u) = (2u^2 + u + 1, 1 + u^2)$.
Lösung: In kartesischen Koordinaten ist $\mathrm{d}\vec{x} = (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3)$, und das Integral ist

$$I = \int_C \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_C (x_1 + x_2)\mathrm{d}x_1 + \int_C (x_2 - x_1)\mathrm{d}x_2$$

Für i) folgt aus $x_2^2 = x_1$ für die Differentiale $2x_2\mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}x_1$. Wenn wir damit im Integral x_1 und $\mathrm{d}x_1$ ersetzen und die Grenzen für x_2 beibehalten, ergibt sich

$$I = \int_{C\,(1,1)}^{(4,2)} \left[(x_1{+}x_2)\mathrm{d}x_1{+}(x_2{-}x_1)\mathrm{d}x_2\right] = \int_1^2 \left[(x_2^2{+}x_2)2x_2{+}(x_2{-}x_2^2)\right]\mathrm{d}x_2 = \frac{34}{3}$$

Für ii) gilt

$$\vec{x}(u) = \begin{pmatrix} 2u^2 + u + 1 \\ 1 + u^2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{d}\vec{x} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}(u)}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u = \begin{pmatrix} 4u + 1 \\ 2u \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}u$$

und damit (wobei wir für die Grenzen $\vec{x}(u) = A$ und $\vec{x}(u) = B$ nach u auflösen müssen)

$$\begin{aligned} I &= \int_{C\,(1,1)}^{(4,2)} \left[(x_1 + x_2)\mathrm{d}x_1 + (x_2 - x_1)\mathrm{d}x_2\right] \\ &= \int_0^1 \left[(3u^2 + u + 2)(4u + 1) + (-u^2 - u)2u\right]\mathrm{d}u = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

1.8 Literatur

Gerhard Berendt, Evelyn Weimar
Mathematik für Physiker,
Band 1 Analysis und Algebra, 2. Auflage, VCH, Weinheim 1990.

K.F. Riley, M.P. Hobson, S.J. Bence
Mathematical methods for physics and engineering,
Cambridge University Press 1998.