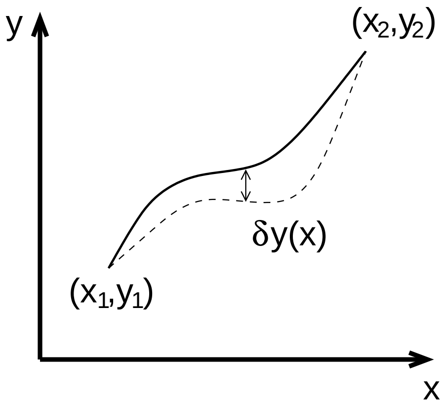
Variationsrechnung

Wir betrachten ein Problem, in dem ein Funktional minimiert (maximiert) werden soll, indem eine Funktion $f(x,\alpha)$ aus einer Schar von Funktionen bestimmt wird, die vom Parameter α abhängen. Einfachster Fall:

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y, y_x, x)$$

I[y] ist eine Größe, die einen stationären Wert annehmen soll. Unter dem Integral hängt $f(x,\alpha)$ via $y(x,\alpha)$ und $y_x(x,\alpha) = \partial y(x,\alpha)/\partial x$ von x und α ab, aber der Zusammenhang $y(x)$ ist unbekannt und gesucht. Dieses Problem ist schwieriger als die einfache Suche nach dem Extremum einer Funktion $f(x)$, wo man die Umgebung der Stelle $f(x_0)$ untersuchen kann. Wir vergleichen hier den (angenommenen) optimalen Weg $y(x)$ mit stationärem Integral $I[y]$ mit einem benachbarten (dafür gibt es unendlich viele Möglichkeiten):



Den Unterschied zwischen den beiden Wegen für ein gegebenes x nennt man die Variation von y, δy und führt dafür die neue Funktion $\eta(x)$ ein, die beliebig ist bis auf zwei Bedingungen:

1. $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$
2. η muss differenzierbar sein.

Allerdings kann $\eta(x)$ wie eine δ-Funktion nur auf einem infinitesimalen Bereich von Null verschieden sein. Zusätzlich mit einem Skalenfaktor α, der die

Stärke der Variation angibt, haben wir

$$\begin{aligned} y(x,\alpha) &= y(x,0) + \alpha\eta(x) \\ \delta y &= y(x,\alpha) - y(x,0) = \alpha\eta(x) \end{aligned} \tag{1}$$

O.B.d.A. wählen wir $y(x,\alpha=0)$ als den unbekannten Weg, der $I[y]$ minimiert. $y(x,\alpha)$ für $\alpha \neq 0$ beschreibt dann einen benachbarten Pfad. I wird damit eine Funktion von α (während es ein Funktional von y ist):

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f\big(y(x,\alpha), y_x(x,\alpha), x\big)$$

und die Bedingung für ein Extremum ist

$$\left.\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \tag{2}$$

analog zum Verschwinden der Ableitung bei der Extremumsuche bei einer Funktion.

Nun berechnen wir die Ableitung:

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_x}\frac{\partial y_x}{\partial \alpha} \right).$$

Aus Gl. (1) folgt

$$\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x), \qquad \frac{\partial y_x(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \eta(x)}{\partial x},$$

und damit

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y_x}\frac{\partial \eta(x)}{\partial x} \right).$$

Um $\eta(x)$ als gemeinsamen Faktor von beiden Termen zu erhalten, integrieren wir den zweiten partiell:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, \frac{\partial f}{\partial y_x}\frac{\partial \eta(x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial f}{\partial y_x}\eta(x)\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx\, \eta(x)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y_x}$$

$\eta(x)$ verschwindet an den Grenzen x_1 und x_2, und daher bleibt nur der zweite Term übrig:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y_x} \right)\eta(x) = 0.$$

Jetzt haben wir die Extremumsbedingung Gl. (2) angewandt und α formal auf Null gesetzt, sodass es nicht mehr Teil der Lösung ist.

Da wir $\eta(x)$ beliebig wählen können, muss die Klammer unter dem Integral für alle x identisch verschwinden, und wir erhalten als Bedingung für einen stationären Wert des Integrals die Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y_x} = 0\,,$$

die als Euler-Gleichung bezeichnet wird.

Literatur:

George B. Arfken, Hans J. Weber, *Mathematical methods for Physicists*, 6th Edition, Elsevier Academic Press 2005.

Helmut Fischer, Helmut Kaul, *Mathematik für Physiker*, Band 3: Variationsrechnung, Differentialgeometrie, Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, 2. Auflage, Teubner, Stuttgart 2006.