Aufgabe 1 (10 Punkte)
Fragen

1a) Jede Drehung im dreidimensionalen Raum lässt sich als Hintereinanderausführung dreier Drehungen um die ursprüngliche z-Achse, die x-Achse im Koordinatensystem nach der ersten Drehung und der neuen z-Achse schreiben. Die zugehörigen Drehwinkel sind die Eulerschen Winkel $(\varphi, \vartheta, \psi)$.

1b) Die Rotationen des freien Kreisels um die Hauptträgheitsachsen mit dem größten und kleinsten Trägheitsmoment sind stabil.

1c) Bei einer aktiven Drehung wird der Vektor im Koordinatensystem gedreht. Bei einer passiven Drehung wird der Vektor als festgehalten gedacht und das Koordinatensystem gedreht

1d) Die $z-$Komponente L_z des Drehimpulses.

1e) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)\delta(x-z) = f(z)g'(z)$ nach Definition der Delta-Distribution.

1f) Die Transformation $f(x,y) \rightarrow g(u,y) = x \cdot u - f(u(x),y)$ mit $u = \frac{\partial f}{\partial x}$ heißt Legendre-Transformation.

1g) An jedem Punkt einer Raumkurve ist durch Tangentenvektor, Normalenvektor und Binormalenvektor lokal eine orthonormale Basis definiert. Das Tripel aus diesen drei Vektoren heißt "begleitendes Dreibein" der Raumkurve.

1h) Wenn in einem mechanischen System die potentielle Energie eine homogene Funktion vom Grad n der Koordinaten ist, so gilt für die Mittelwerte von kinetischer Energie T und potentieller Energie U die Beziehung $2 < T >= n < U >$.

1i) Ein Propagator ist eine Abbildung (Matrix), die den Anfangszustand eines mechanischen Systems auf den Zustand zur Zeit t abbildet: $P(t,0)\vec{z}(0) = \vec{z}(t)$, bzw. allgemeiner $P(t,t')\vec{z}(t') = \vec{z}(t)$.

1j) Symplektische Matrizen lassen antisymmetrische Bilinearformen invariant:
$A^T \epsilon A = \epsilon$ mit dem antisymmetrischen Tensor ϵ aus der Vorlesung.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Brechungsgesetz

2.a) Der Impuls (und damit die Geschwindigkeit) in y-Richtung bleibt erhalten, weil das Problem in dieser Richtung translationsinvariant ist.

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_y}{|\vec{v}_{x<0}|} \cdot \frac{|\vec{v}_{x>0}|}{v_y} = \frac{|\vec{v}_{x>0}|}{|\vec{v}_{x<0}|}$$

Der Energieerhaltungssatz liefert:

$$\frac{m}{2}(v_{x<0}^2 + v_y^2) + V_1 = \frac{m}{2}(v_{x>0}^2 + v_y^2) + V_2 \Leftrightarrow v_{x>0}^2 = v_{x<0}^2 - \frac{2}{m}(V_2 - V_1)$$

Also:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \sqrt{1 - \frac{2(V_2 - V_1)}{m(v_{0x}^2 + v_{0y}^2)}}$$

2.b) Mit $E = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + V(x)$ und $n_1 = \sqrt{\frac{m}{2}(v_{0x}^2 + v_{0y}^2)}$, $n_2 = \sqrt{\frac{m}{2}(v_{x,x>0}^2 + v_{0y}^2)}$ folgt mit a):

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{m}{2}\frac{2}{m}\sqrt{\frac{\vec{v}_{x>0}^2}{\vec{v}_{x<0}^2}} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Atwoodsche Fallmaschine

3.a) Wir verwenden die Positionen x_1 und x_2 (beide nach unten orientiert) der beiden Massen als generalisierte Koordinaten. Die Zwangsbedingung ist dann $x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$. Für die verallgemeinerte Lagrange-Funktion ergibt sich somit: (beim VZ des Potentials die Orientierung von x beachten)

$$L^* = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 + mgx_1 + mgx_2 + \lambda(x_1 + x_2)$$

Für die 1. Bewegungsgleichung erhalten wir:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial x_1} = \frac{\partial L^*}{\partial x_1} \Leftrightarrow m_1\ddot{x}_1 = m_1 g + \lambda$$

analog für die 2. Bewegungsgleichung:

$$m_2\ddot{x}_2 = m_2 g + \lambda \Leftrightarrow \lambda = m_2\ddot{x}_2 - m_2 g$$

Den letzten Ausdruck setzen wir in die erste Bewegungsgleichung ein und erhalten:

$$m_1\ddot{x}_1 = m_1 g + m_2\ddot{x}_2 - m_2 g \Leftrightarrow (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = (m_1 - m_2)g$$

wobei wir $x_2 = -x_1$ verwendet haben. Für die zweite Bewegungsgleichung ergibt sich ganz analog:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_2 = (m_2 - m_1)g$$

Das ist die Gleichung einer gleichmäßig beschleunigten Fallbewegung mit reduzierter Fallbeschleunigung $g' = \pm\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$.

3.b) Zweimaliges Integrieren liefert:

$$x_1(t) = \frac{g'}{2}t^2 + \dot{x}_1(0)\cdot t + x_1(0) = \frac{m_1 - m_2}{2(m_1 + m_2)}gt^2 + a$$

$$x_2(t) = \frac{m_2 - m_1}{2(m_1 + m_2)}gt^2 + b$$

3.c)

$$Z_1 = \lambda\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 + x_2) = \lambda = m_2\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g - m_2 g = -g\frac{2\cdot m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$Z_2 = -g\frac{2\cdot m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Die Zwangskräfte sind also der Fallbewegung entgegengesetzt und vom Verhältnis der beiden Massen abhängig. Sie entsprechen der Seilspannung durch die zweite beschleunigte Masse. Überprüfung der Grenzfälle:

- $m_2 \to 0 : Z_1 \to 0$. OK.
- $m_2 = m_1 : Z_1 = Z_2 = m_1 g$. Also genau die Seilspannung, die nötig ist, das Gewicht der Massen auszugleichen. OK

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Kanonische Transformationen

4a)

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = Km\omega \qquad \frac{\partial Q}{\partial p} = K$$
$$\frac{\partial P}{\partial q} = -Km\omega \quad \frac{\partial P}{\partial p} = K$$

Für kanonische Transformationen muss gelten (äquivalent: Die Jacobi-Matrix ist symplektisch): $\{Q, Q\} = \{P, P\} = 0$. (Klar!) Sowie:

$$1 = \{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} =$$

$$= Km\omega \cdot K - K \cdot (-Km\omega) = 2K^2 m\omega \Leftrightarrow K = \sqrt{\frac{1}{2m\omega}}$$

4b)

$$P + Q = 2Kp \qquad \Leftrightarrow p = \frac{P+Q}{2K}$$
$$Q - P = 2Km\omega q \quad \Leftrightarrow q = \frac{Q-P}{2Km\omega}$$

Dies in die Hamiltonfunktion eingesetzt ergibt:

$$H(Q, P) = \frac{(P+Q)^2 2m\omega}{4 \cdot 2m} + \frac{m\omega^2(Q-P)^2 \cdot 2m\omega}{2 \cdot 4m^2\omega^2}$$
$$= \frac{(P+Q)^2\omega}{4} + \frac{(Q-P)^2\omega}{4} = \frac{\omega}{2}(P^2 + Q^2)$$

4c) Kanonische Bewegungsgleichungen:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega P$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = -\omega Q$$

$$\ddot{Q} = \omega\dot{P} = -\omega^2 Q$$

$$\Rightarrow Q(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$\dot{P} = -\omega Q = -\omega(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) \Rightarrow P(t) = -A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

Die Integrationskonstante, die man für $P(t)$ erhält, muss null sein, da sonst die DGLen nicht mehr erfüllt sind.

4d)

$$p(t) = \frac{P(t) + Q(t)}{2K} = \frac{(A + B)\cos(\omega t) + (B - A)\sin(\omega t)}{2K}$$

$$q(t) = \frac{Q(t) - P(t)}{2K} = \frac{(A - B)\cos(\omega t) + (B + A)\sin(\omega t)}{2K}$$

$$q(0) = 0 \Rightarrow A - B = 0 \Rightarrow A = B$$

$$p(0) = \frac{A + B}{2K} = p_0 \Rightarrow \frac{A}{K} = p_0 \Rightarrow A = p_0 K$$

Also:$q(t) = 2Kp_0(\sin(\omega t))$

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Rotierendes Molekül

5a) Die allgemeine Definition des Trägheitstensors lautet::

$$\Theta_{ab} = \sum_i \Theta_{ab}^{(i)} = \sum_i m_i(\delta_{ab}\vec{r}_i^2 - r_a^{(i)} r_b^{(i)})$$

(i durchläuft dabei die 5 Massen. Der eingeklammert oben stehende Index dient lediglich der besseren Lesbarkeit und hat die gleiche Bedeutung wie der untere Index i.) In Komponenten ausgeschrieben (Bei der Rechnung nutzt man natürlich die Symmetrie-Eigenschaft des Tensor aus!):

$$\Theta_{ab} = \sum_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i x_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}$$

$$= ma^2 \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = ma^2 \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Der Trägheitstensor ist in dem angegebenen Koordinatensystem also nicht diagonal. Seine Eigenwerte liefern die Hauptträgheitsmomente:

$$0 = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^3 - 4(4-\lambda) = (4-\lambda)\{(4-\lambda)^2 - 4\}$$

$$= (4-\lambda)(12 - 8\lambda + \lambda^2) = -(\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda - 6)$$

Die Hauptträgheitsachsen kann man nun als Eigenvektoren des Trägheitstensors bestimmen. Schneller geht die folgende Alternative:

Offensichtlich ist die z-Achse Hauptträgheitsachse mit Trägheitsmoment $4ma^2$: $\vec{t}_3 = (0,0,1)$ Die beiden anderen HTA müssen in der $x-y$-Ebene liegen. Wir suchen eine Achse in dieser Ebene mit zugehörigem Trägheitsmoment $2ma^2$. Das kann nur die Achse durch die beiden Massen an den Orten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ sein. Folglich ist $\vec{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ Hauptträgheitsachse. $\vec{t}_2$ muss senkrecht auf $\vec{t}_1$ stehen und mit den beiden anderen Achsen ein Rechtssystem bilden $\Rightarrow \vec{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$.

$$\Theta_1 = 2ma^2 \qquad \Theta_2 = 6ma^2 \qquad \Theta_3 = 4ma^2$$

5b) i)

$$\vec{\omega} = \omega\vec{e}_x = \frac{\omega}{\sqrt{2}}(\vec{t}_1 - \vec{t}_2) \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega, \omega_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\omega, \omega_3 = 0$$

ii) Die Euler-Gleichungen lauten:

$$M_1 = \Theta_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(\Theta_3 - \Theta_2) = 0 - 0 = 0$$
$$M_2 = \Theta_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(\Theta_1 - \Theta_3) = 0 - 0 = 0$$
$$M_3 = \Theta_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(\Theta_2 - \Theta_1) = 0 + \frac{\omega^2}{2}4ma^2 = 2ma^2\omega^2$$

iii) Stabile Rotationen des freien Kreisels sind diejenigen um die Hauptträgheitsachsen mit dem größten und kleinsten Trägheitsmoment. Bei Drehungen um jede andere Achse muss ein Drehmoment wirken, um die Drehachse stabil zu halten.

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Variationsrechung
Zu lösen ist das Variationsproblem

$$\delta\int_{0,0}^{L,0} e^{-\frac{y}{h}}\, ds = \delta\int_0^L e^{-\frac{y}{h}}\sqrt{1+(y')^2}\, dx = 0$$

Dabei haben wir

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow ds = \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\, dx$$

verwendet. Wir beobachten, dass die Lagrangefunktion

$$F(y,y',x) = e^{-\frac{y}{h}}\sqrt{1+(y')^2}$$

nicht explizit von x abhängt. Analog zur Herleitung der Erhaltung der verallgemeinerten Energie in der Vorlesung (siehe Skript) gilt somit:

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.} =: a$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow e^{-\frac{y}{h}}\sqrt{1+(y')^2} - y'e^{-\frac{y}{h}}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = a \\
&\Leftrightarrow \sqrt{1+(y')^2} - \frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = a \cdot e^{\frac{y}{h}} \\
&\Leftrightarrow 1 + (y')^2 - (y')^2 = ae^{\frac{y}{h}}\sqrt{1+(y')^2} \\
&\Leftrightarrow 1 = ae^{\frac{y}{h}}\sqrt{1+(y')^2}
\end{aligned}$$

Nun machen wir den in der Aufgabenstellung vorgeschlagenen Ansatz:

$$y(x) = h\ln(u(x)) \Rightarrow y'(x) = h\frac{u'}{u}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
1 = a \cdot u\sqrt{1+h^2(\frac{u'}{u})^2} &= a\sqrt{u^2+h^2(u')^2} \\
&\Rightarrow 1 = a^2(u^2+h^2(u')^2) \\
&\Leftrightarrow u' = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{1}{a^2} - u^2} = \frac{du}{dx} \\
&\Leftrightarrow dx = \frac{h \cdot a\, du}{\sqrt{1-(ua)^2}} \\
\Rightarrow x(u) = \int \frac{h\, dz}{\sqrt{1-z^2}} = h\arcsin(z) + c &= h\arcsin(ua) + c
\end{aligned}$$

Mit z=ua und der Integrationskonstanten c.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}\sin\frac{x-c}{h} &= u \\
\Rightarrow y(x) = h\ln(u(x)) = h\ln(\frac{1}{a}\sin(\frac{x-c}{h}&))
\end{aligned}$$

Bestimmung der Konstanten a, c aus den Randbedigungen.