Komplexe Zahlen

Körper der komplexen Zahlen

Im $\mathbb{R}^n$ lässt sich im Allgemeinen keine Multiplikation derart definieren, dass im $\mathbb{R}^n$ die Körpereigenschaften erfüllt sind. (Körper: es gibt zwei Abbildungen, bezüglich derer eine Menge eine abelsche Gruppe bildet, und zusätzlich gilt Distributivität $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$). Ausnahme ist der Fall $n = 2$. Das führt auf den Körper der komplexen Zahlen.

Im $\mathbb{R}^2$ hatten wir bereits eine Addition

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

Nun definieren wir eine Multiplikation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 - x_2y_2 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \end{pmatrix}$$

Außerdem wählen wir $\vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als neutrales Element der Multiplikation. Dann gelten neben den Rechengesetzen für die Addition im $\mathbb{R}^2$ die Regeln

α)	$\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$	Assoziativität
β)	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$	Kommutativität
γ)	$\vec{a}\cdot\vec{1} = \vec{1}\cdot\vec{a} = \vec{a}$	Existenz eines neutralen Elements
δ)	Die Gleichung $\vec{a}\cdot\vec{x} = \vec{b}$ hat für $\vec{a} \neq 0$ genau eine Lösung $\vec{x}$	Existenz eines Inversen
ε)	$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$	Distributivität

Also gelten die Körpereigenschaften. Der $\mathbb{R}^2$ mit der so definierten Addition und Multiplikation heißt Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Die Eigenschaften α-γ und ε sind leicht nachzurechnen. Zu δ: Die Gleichung $\vec{a}\cdot\vec{x} = \vec{b}$ bedeutet in Komponenten:

$$\begin{aligned} a_1x_1 - a_2x_2 &= b_1 \\ a_1x_2 + a_2x_1 &= b_2 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Determinante $D = a_1^2 + a_2^2 > 0$ und damit eine eindeutig bestimmte Lösung x_1, x_2, die nach der Cramerschen Regel berechnet

werden kann.

Die Lösung der Gleichung $\vec{a}\cdot\vec{x} = \vec{1}$ bezeichnen wir mit $\vec{a}^{-1}$. Die Cramersche Regel liefert

$$\vec{a}^{-1} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2}\begin{pmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$$

Darstellung komplexer Zahlen

Da die Darstellung mit Spaltenvektoren schwerfällig ist, gehen wir wie folgt zur üblichen Schreibweise $x + iy$ über:
Jede komplexe Zahl kann man in der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

schreiben, denn es ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot y - 1\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 1\cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

Für die imaginäre Einheit $i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$i\cdot i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 - 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir schreiben zur Abkürzung x statt $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = x + iy \qquad \text{und} \qquad i^2 = -1$$

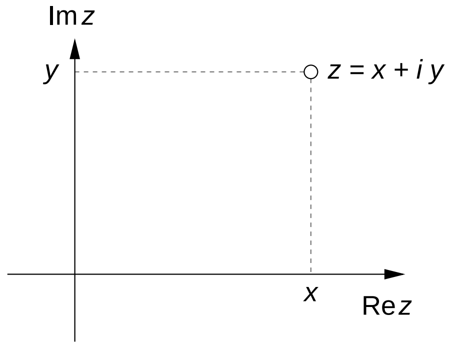
Die Identifikation der reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ mit den Punkten $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ ist durch die Rechenoperationen gerechtfertigt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

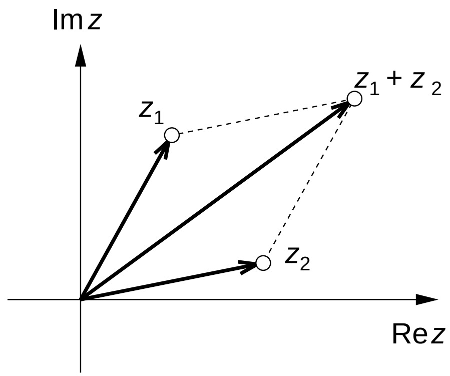
Mit der neuen Schreibweise sieht Addition und Multiplikation so aus:

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

Dabei rechnet man wie gewohnt mit der einzigen zusätzlichen Regel dass $i^2 = -1$. Wir nennen x den Realteil von $z = x + iy$, symbolisch $x = \operatorname{Re} z$, und y den Imaginärteil von z, symbolisch $y = \operatorname{Im} z$.
Geometrisch können wir jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ als Punkt der komplexen Ebene deuten:



Damit wird ergibt sich die komplexe Addition wie im $\mathbb{R}^2$ durch Parallelkonstruktion:



Warum komplexe Zahlen?

Eine wichtiger Satz ist der Fundamentalsatz der Algebra: Für jedes Polynom

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

gibt es komplexe Zahlen $z_k = \alpha_k + i\beta_k$ sodass

$$p(x) = (x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n)$$

Dieser Fundamentalsatz sichert die Existenz wenigstens einer komplexen Nullstelle und gibt Auskunft darüber, wie viele Nullstellen (mit Vielfachheit) insgesamt zu erwarten sind.

Betrachten wir z.B. die kubische Gleichung

$$x^3 = 3px + 2q$$

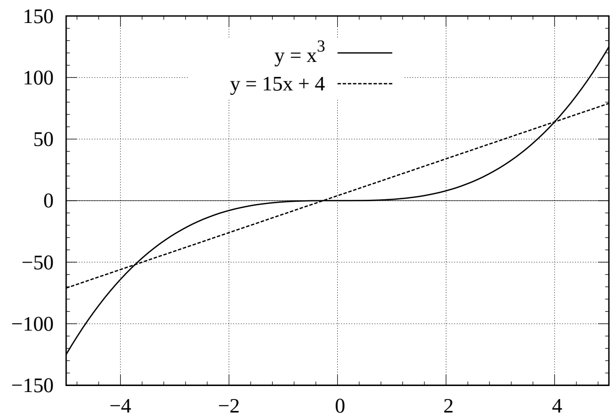
Es ist anschaulich klar, dass die Gerade $y = 3px + 2q$ immer mindestens einen Schnittpunkt mit der Hyperbel $y = x^3$ haben muss. Nach den Cardanischen Formeln ist die reelle Lösung für einen solchen Schnittpunkt:

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

Allerdings sind komplexe Zahlen im Spiel, sobald $p^3 > q^2$! Wenn man z.B. $p = 5$, $q = 2$ betrachtet, d.h. $x^3 = 15x + 4$, dann ist

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$$

Mit $(2 \pm i)^3 = 2 \pm 11i$ lässt sich das zu $x = 4$ vereinfachen.



Also erfordern reelle Probleme komplexe Zahlen zu ihrer Lösung!

Division mit komplexen Zahlen

Zwar sind die Rechnenregeln der Multiplikation festgelegt, aber es ist nicht immer ganz einfach, komplexe Ausdrücke in die Standardform $z = x + iy$ zu bringen. Für die Division zweier komplexer Zahlen z_1, z_2 gilt

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2} \\ = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

Konjugiert komplexe Zahlen

Für $z = x+iy$ definieren wir die zu z konjugiert komplexe Zahl durch

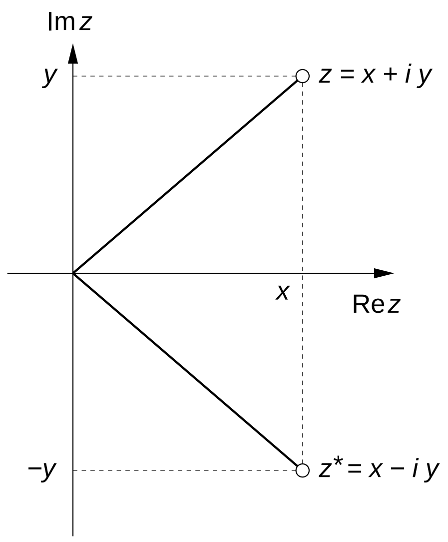
$$z^* = x - iy$$

Es gelten die Rechenregeln

$$(z_1+z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$

die man leicht nachrechnen kann.
Geometrisch kann man die Konjugation als Spiegelung an der reellen Achse deuten:



Es gelten auch die Regeln

$$z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\,z \qquad \text{und} \qquad z - z^* = 2i\,\mathrm{Im}\,z$$

Betrag und Argument der komplexen Zahlen

Der Betrag einer komplexen Zahl $z = x+iy$ ist definiert durch ihren Abstand vom Nullpunkt in der Zahlenebene, also durch

$$|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Für den Betrag gilt wie in $\mathbb{R}$

α) $|z| \geq 0 \qquad |z| = 0 \curvearrowright z = 0$
β) $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$
γ) $|z+w| \leq |z|+|w|$ Dreiecksungleichung

Es gilt außerdem

$$z\cdot z^* = |z|^2 \qquad \text{denn} \qquad (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$$

Für $z = x+iy \neq 0$ ist durch

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} \qquad \text{und} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{|z|}$$

ein Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ bis auf ein Vielfaches von 2π festgelegt. Mit diesem ergibt sich die Polardarstellung der komplexen Zahl

$$z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

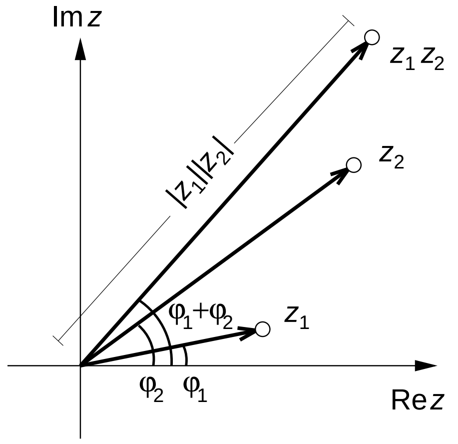
Der Winkel φ wird auch als Argument oder Phase bezeichnet.
Damit können wir die Multiplikation geometrisch deuten:
Für

$$z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad w = |w|\cdot(\cos\psi + i\sin\psi)$$

gilt

$$\begin{aligned} z\cdot w &= |z|\cdot|w|\big((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \cos\psi\sin\varphi)\big) \\ &= |z\cdot w|\big(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\big)\end{aligned}$$

Damit ist die Abbildung $z \to z\cdot w$ für festes $w \neq 0$ eine Drehstreckung: erst Drehung D_ψ um den Winkel ψ, dann Streckung mit dem Faktor $|w|$, oder umgekehrt.



Die komplexe Exponentialfunktion

Wir definieren die komplexe Exponentialfunktion in Analogie zur reellen Exponentialfunktion als

$$e^z = \exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_k \frac{z^k}{k!}$$

mit der Eulerschen Zahl $e = 2.71828\ldots$. Diese Funktion erfüllt wie im Reellen die Funktionalgleichung

$$F(z+w) = F(z) \cdot F(w)$$

was man anhand der Reihenentwicklung nachrechnen kann.
Insbesondere können wir jetzt ermitteln, was $e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}$ ist:

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \cdots = C(\varphi) + iS(\varphi)$$

mit

$$C(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \cdots = \cos\varphi$$
$$S(\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \cdots = \sin\varphi$$

Damit ergibt sich die Eulersche Identität

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Rechnen mit komplexen Zahlen in Polardarstellung

Damit können wir jede komplexe Zahl z in der Form

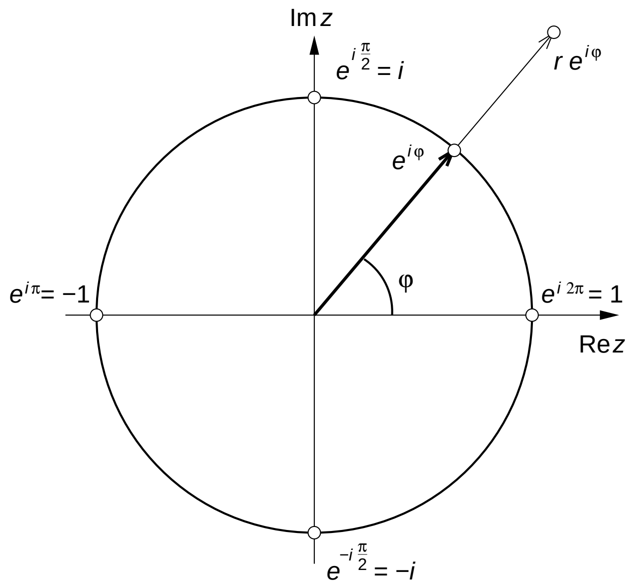
$$z = r \cdot e^{i\varphi}, \qquad r \geq 0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

darstellen. Dabei ist $r = |z|$ eindeutig bestimmt, und auch die Zahl $e^{i\varphi}$ ist durch z eindeutig bestimmt, denn für $z = re^{i\varphi}$ ist

$$|z| = |r| \cdot |e^{i\varphi}| = r \cdot 1 = r$$

und für $z \neq 0$ gilt damit $e^{i\varphi} = \frac{z}{|z|}$. Allerdings liegt φ nur bis auf ein Vielfaches von 2π fest. Daher fordert man $-\pi < \varphi \leq \pi$, damit jedem $z \neq 0$ eindeutig ein Winkel $\varphi \in]-\pi, \pi]$ entspricht. Für $z = x + iy \neq 0$ gilt

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \arccos\frac{x}{r} & y \geq 0 \\ -\arccos\frac{x}{r} & y < 0 \end{cases}$$



Multiplikation und Division werden in Polardarstellung besonders einfach:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Literatur:

Helmut Fischer, Helmut Kaul, *Mathematik für Physiker*, Band 1: Grundkurs, 5. Auflage, Teubner, Stuttgart 2005.

Gerhard Berendt, Evelyn Weimar, *Mathematik für Physiker*, Band 1 Analysis und Algebra, 2. Auflage, VCH, Weinheim 1990.

K.F. Riley, M.P. Hobson, S.J. Bence, *Mathematical methods for physics and engineering*, Cambridge University Press 1998.