Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät II
Physik und Mechatronik

Fachrichtung 7.1–Theoretische Physik
Dr. Harald O. Jeschke
Gebäude E 2 6, Zi. 4.21
Tel. (0681) 302 57409

Saarbrücken, 29.2.2008

Klausur zur Theoretischen Physik I, WS 2007/08

(Zugelassene Hilfsmittel: Ein einseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt)

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Geburtsdatum: ______________________ Geburtsort: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Studiengang: ______________________

	1	2	3	4	5	6	Σ
bearbeitet							
Punkte							

Bitte jede Aufgabe auf einem neuen Blatt beginnen.

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Fragen (je 1 Punkt)

1a) Was versteht man unter einem verallgemeinerten Impuls? (Mit Formel)

1b) Welche möglichen Lösungskurven für das nichtrelativistische gravitative Zweikörperproblem gibt es?

1c) Erläutern Sie das Hamiltonsche Prinzip. Welche Bedingungen müssen die zur Variation zugelassenen Bahnen erfüllen?

1d) Was versteht man unter der *Corioliskraft*?

1e) Was versteht man unter einer *Lagrangedichte*?

1f) Was besagt das *Hookesche Gesetz*? (Mit Formel)

1g) Geben Sie die (bezüglich des Impulses) Legendretransformierte der Hamiltonfunktion eines freien Teilchens an.

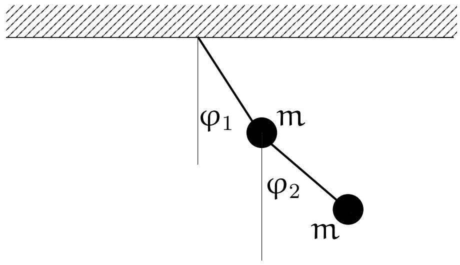
1h) Was versteht man unter einem *konservativen Kraftfeld*? Gegeben Sie ein Kriterium dafür an zu entscheiden, ob ein gegebenes Kraftfeld konservativ ist.

1i) Erläutern Sie kurz den Begriff *Resonanz*.

1j) Worin unterscheiden sich ein *symmetrischer Kreisel* und ein *Kugelkreisel*?

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Ebenes Doppelpendel

Eine Masse m hänge an einem masselosen Faden der Länge l. An m ist ein weiterer masseloser Faden der Länge l angebracht, an dessen Ende eine zweite Masse m hängt. Gesucht sind die Bewegungsgleichungen dieses Doppelpendels:



2a) Bestimmen Sie zunächst kinetische und potentielle Energie in kartesischen Koordinaten.

2b) Schreiben Sie die Energien nun in Abhängigkeit von φ_1 und φ_2 und zeigen Sie, dass sich die Lagrange-Funktion in der folgenden Form schreiben lässt:

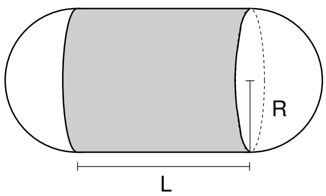
$$L(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \frac{1}{2} m l^2 \{2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\} + mgl(2\cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2))$$

2c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems. Interpretieren Sie die auftretenden Terme.

2d) Nähern Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Winkel φ_1, φ_2 und formulieren Sie das Problem in ein 4×4-Eigenwertproblem um.

Hinweis: Die Bewegungsgleichungen und das Eigenwertproblem brauchen nicht gelöst zu werden!
$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Rotierende Kapsel



Gegeben sei eine (solide) Kapsel der Masse m. Die Kapsel besteht aus einem Vollzylinder der Länge L und Radius R, an dessen beiden Enden zwei gleiche Halbkugeln mit Radius R aufgesetzt sind. Zylinder und Halbkugeln sind homogen mit gleicher Massendichte ρ.

3a) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsachsen $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3$ der Kapsel und berechnen Sie explizit den Trägheitstensor im Hauptachsensystem.

3b) Um welche Drehachsen kann die Kapsel stabil frei rotieren?

3c) Die Kapsel rotiere nun mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die Raumdiagonale $\vec{d} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{t}_1 + \vec{t}_2 + \vec{t}_3)$ des Hauptachsensystems. Wie groß ist ihr Trägheitsmoment für diese Rotation? Bestimmen Sie das auf die Kapsel wirkende Drehmoment $\vec{M}$ im Hauptachsensystem.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Kanonische Transformationen
Gegeben sei die Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators:

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega_0^2 q^2$$

4a) Zeigen Sie, dass die Transformation

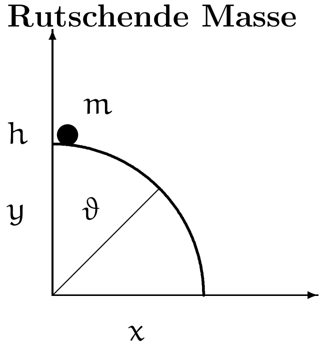
$$Q(q,p) = \arctan(m\omega_0 \frac{q}{p}) \qquad P(q,p) = \frac{m\omega_0}{2} q^2 + \frac{p^2}{2m\omega_0}$$

kanonisch ist.

4b) Bestimmen Sie die transformierte Hamiltonfunktion $H(Q,P)$ und die zugehörigen kanonischen Bewegungsgleichungen.

4c) Lösen Sie die transformierten Bewegungsgleichungen und transformieren Sie die Lösung zurück auf die ursprünglichen Variablen (q,p).

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Rutschende Masse



Eine Punktmasse m rutsche im homogenen Gravitationsfeld reibungsfrei eine Kurve hinunter, die durch die Gleichung

$$y(x) = (h^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

beschrieben wird. Die Masse starte zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $P(0,h)$ aus der Ruhelage.

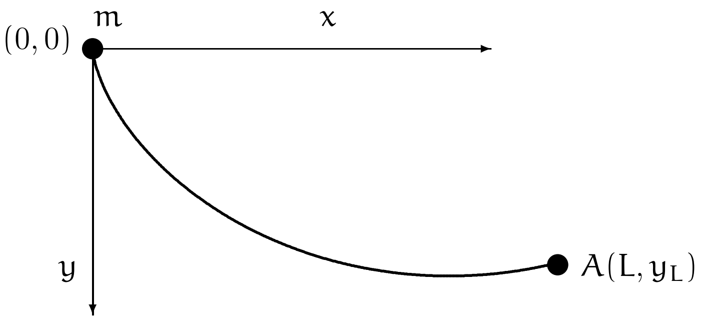
5a) Stellen Sie die Lagrangefunktion und die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen auf.

5b) Benutzen Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren, um die auf die Masse wirkende Zwangskraft zu berechnen.

5c) Bei welchem Winkel ϑ gegenüber der Vertikalen löst sich die Masse von der Kurve?

5d) An welcher Stelle schlägt die Masse wieder auf dem Boden auf?

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Brachystochronenproblem
Ein Massenpunkt m bewege sich reibungfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer ebenen Bahn vom Ursprung zum Punkt $A(L, y_L)$.



6a) Geben Sie für eine vorgegebene Bahnkurve $y = y(x)$ einen Integralausdruck für die Zeit τ_A an, die der Massenpunkt für den Weg nach A benötigt, wenn er zur Zeit $t = 0$ im Punkt $(0, 0)$ startet.

6b) Gesucht ist die Bahnkurve $y(x)$, für die τ_A minimal wird. Zeigen Sie, dass die gesuchte Kurve der Differentialgleichung

$$y(1 + y'^2) = c^2$$

mit $y' = \frac{dy}{dx}$ und konstantem $c \in \mathbb{R}$ genügen muss.

6c) Zeigen Sie, dass die in Parameterform gegebene Kurve

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c^2}{2}(t - \sin(t)) \\ \frac{c^2}{2}(1 - \cos(t)) \end{pmatrix}$$

eine Lösung obiger Differentialgleichung ist. Um welche Kurve handelt es sich?

Viel Erfolg!