1. Fourierreihe und Fouriertransformation

1.0 Motivation

Die Fourieranalyse hat in der Quantenmechanik mehrere wichtige Anwendungen.
a) **Basistransformation**: Durch Fouriertransformation kann man zwischen Ortsraum ($\psi(\vec{r}, t)$) und Impulsraum ($\psi(\vec{p}, t)$) wechseln. Das hat z.B. den Vorteil, dass der Impulsoperator im Impulsraum ebenso einfach wird wie der Ortsoperator im Ortsraum.
b) **Spektralanalyse/Reihenentwicklung**: Die Fourieranalyse erlaubt es zum Beispiel, festzustellen, welche Frequenzen zu einem komplizierten zeitabhängigen Messsignal gehören.
c) **Lösung von Differentialgleichungen**: Fouriertransformation vereinfacht Differentialgleichungen oft stark, indem sie Ableitungen durch Produkte ersetzt.

1.1 Fourierreihen

Periodische Funktionen lassen sich nach „Teilfrequenzen“ zerlegen; dieses Verfahren ist unter den Namen Fourieranalyse bekannt.
Definition der periodischen Funktionen: Eine Funktion $f(t)$ heißt periodisch mit Periode T ($T > 0$), wenn für alle t gilt: $f(t + T) = f(t)$. Der kleinste Wert von T, für das das erfüllt ist, heißt kleinste Periode oder einfach Periode von $f(t)$. Die Fourieranalyse beruht auf dem Fouriertheorem:
Jede eindeutige Funktion $f(t)$, die auf dem geschlossenen Intervall $[-\pi, \pi]$ definiert ist, kann auf diesem Intervall durch die trigonometrische Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right] \tag{1.1}$$

dargestellt werden, wobei die Entwicklungskoeffizienten nach den Eulerschen Formeln

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\, f(t)\cos(nt), \qquad n = 0,1,2,\ldots \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\, f(t)\sin(nt), \qquad n = 1,2,\ldots
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

bestimmt werden (Existenz dieser Integrale ist also erforderlich). Diese Reihenentwicklung der Funktion $f(t)$ heißt Fourierreihe. Die punktweise Konvergenz dieser Reihe wird durch das Dirichlet-Theorem bewiesen, wobei die Funktion $f(t)$ den Dirichletbedingungen genügen muß ($f(t)$ beschränkt im Intervall, nur endlich viele Unstetigkeiten, nur endlich viele Maxima und Minima).

Veränderung der Intervalls von $[-\pi, \pi]$ auf $[-T/2, T/2]$ (d.h. Periode T statt 2π): Dann ist

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right] \\
\text{mit} \quad a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), \qquad n = 0,1,\ldots \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), \qquad n = 1,2,\ldots
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Übergang zur komplexen Form: Wir ersetzen cos und sin durch die komplexe Exponentialfunktion:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \frac{\exp\left(i\frac{2\pi nt}{T}\right) + \exp\left(-i\frac{2\pi nt}{T}\right)}{2} + b_n \frac{\exp\left(i\frac{2\pi nt}{T}\right) - \exp\left(-i\frac{2\pi nt}{T}\right)}{2i}\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - ib_n}{2}\exp\left(i\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + ib_n}{2}\exp\left(-i\frac{2\pi nt}{T}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp\left(i\frac{2\pi nt}{T}\right) \\
\text{mit} \quad f_0 &= \frac{a_0}{2}, \quad f_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad f_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Mit der Benennung $\omega_n = 2\pi n/T$ gelangen wir also zur komplexen Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(i\omega_n t)\,. \tag{1.5}$$

Die Fourierreihe (1.5) konvergiert gleichmäßig (und damit auch punktweise), wenn $f(t)$ periodisch mit der Periode T und stückweise glatt ist. Die (schwächere) Forderung der Konvergenz im quadratischen Mittel ist erfüllt für periodische, in $[-T/2, T/2]$ stetige Funktionen $f(t)$.
Die **Fourierkoeffizienten** f_n sind durch

$$f_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t) \exp(-i\omega_n t) \tag{1.6}$$

gegeben. Für den Beweis verwenden wir die Orthonormalitätsrelation

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, \exp\big(i\omega(n-m)t\big) = \delta_{mn} \qquad \text{wobei } \omega_n = \omega n = \frac{2\pi n}{T} \tag{1.7}$$

und finden, wenn wir $f(t)$ mit $\exp(-i\omega_m t)$ multiplizieren und über das Intervall $[-T/2, T/2]$ integrieren:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t) \exp(-i\omega_m t) &= \int_{-T/2}^{T/2} dt \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp\big(i(\omega_n - \omega_m)t\big) \\ &= T \sum_n f_n \delta_{mn} = T\, f_m. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Damit ist Gl. (1.6) bewiesen.

1.2 Fourierintegrale

Nicht-periodische Funktionen lassen sich i.a. durch Fourierintegrale darstellen, die sich aus Gl. (1.5) im Limes $T \to \infty$ ergeben, d.h. das Periodizitätsintervall ist $[-T/2, T/2]_{T\to\infty}$, und damit muss die Summe über ω_n durch ein Integral über ω ersetzt werden. $T \to \infty$ bedeutet dann, dass $\Delta\omega = 2\pi/T \to 0$ geht, d.h. Schritte zwischen benachbarten Frequenzen werden immer kleiner, und die erlaubten Frequenzen werden zu einem Kontinuum. Da die unendliche Summe der Fourierreihe in ein Integral übergeht, werden auch die Koeffizienten f_n zu kontinuierlichen Funktionen $\tilde{f}(\omega)$.

Sei $\Delta\omega = 2\pi/T$ der Abstand benachbarter Frequenzen ω_n, so ist

$$f(t) = \sum_n \frac{\sqrt{2\pi}\Delta\omega}{\sqrt{2\pi}\Delta\omega} f_n \exp(i\omega_n t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega\, \tilde{f}(\omega_n) \exp(i\omega_n t) \tag{1.9}$$

mit

$$\tilde{f}(\omega_n) = \frac{\sqrt{2\pi} f_n}{\Delta\omega} = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} f_n \tag{1.10}$$

und im Grenzübergang $T \to \infty$

$$\tilde{f}(\omega_n) \xrightarrow{T\to\infty} \tilde{f}(\omega), \quad \Delta\omega \xrightarrow{T\to\infty} d\omega, \quad \omega_n \xrightarrow{T\to\infty} \omega \tag{1.11}$$

Also kann man Gl. (1.9) als *Riemannsumme* des *Fourierintegrals*

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde{f}(\omega) \exp(i\omega t)} \tag{1.12}$$

auffassen. Für die Umkehrung von Gl. (1.12) zeigt der Vergleich von Gl. (1.6) und (1.10):

$$\boxed{\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) \exp(-i\omega t)}\,. \tag{1.13}$$

$\tilde{f}(\omega)$ heißt die *Fouriertransformierte* zu $f(t)$. Sie existiert und (1.12) konvergiert im quadratischen Mittel für alle quadratintegrablen Funktionen $f(t)$, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, |f(t)|^2 < \infty; \tag{1.14}$$

$\tilde{f}(\omega)$ ist dann auch quadratintegrabel.

Beispiel 1: Fouriertransformierte der Exponentialfunktion

Wir suchen die Fouriertransformierte $\tilde{f}(\omega)$ zur Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A \exp(-\lambda t) & t \geqslant 0, \lambda > 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

Dann gilt nach Gl. (1.13):

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \exp(-i\omega t) f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} dt\, \exp(-i\omega t)\exp(-\lambda t) \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{\exp\big(-(i\omega+\lambda)t\big)}{i\omega+\lambda}\right]_0^{\infty} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i\omega+\lambda}\end{aligned} \tag{1.16}$$

Man sieht, dass der Vorfaktor A nur die Amplitude, nicht die Form der Fouriertransformierten beeinflusst.

Beispiel 2: Rechteckförmige Frequenzverteilung

Wir betrachten die Rechteckverteilung von Frequenzen

$$\tilde{f}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.17}$$

und suchen die zugehörige Zeitentwicklung $f(t)$. Diese ergibt sich durch inverse Fouriertransformation (Gl. (1.12))

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde{f}(\omega)\exp(i\omega t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\Omega}^{\Omega} d\omega\, \exp(i\omega t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\exp(i\omega t)}{it}\right]_{-\Omega}^{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{i\Omega t}-e^{-i\Omega t}}{it} = \frac{2\Omega}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}\end{aligned} \tag{1.18}$$

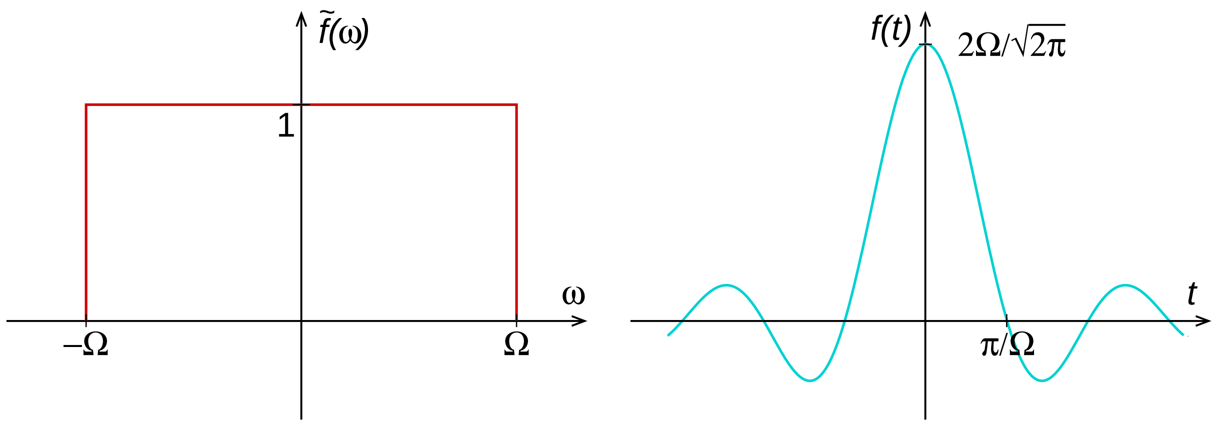

Abbildung 1.1: Rechteckfunktion und ihre Fouriertransformierte.

Die Dauer Δt des kurzen Wellenzuges von $f(t)$ schätzt man aus Figur 1.1 ab zu:

$$\Delta t \approx \frac{\pi}{\Omega} \quad \text{und mit} \quad \Delta\omega = 2\Omega \quad \curvearrowright \quad \Delta\omega\Delta t \approx 2\pi. \tag{1.19}$$

Je schmaler (breiter) das Signal $f(t)$ werden soll, desto breiter (schmaler) ist das Frequenzspektrum, das man benötigt. Diese *Unschärferelation* ist nicht an das Beispiel (1.17) gebunden, sondern ist ein charakteristisches Merkmal der Fouriertransformation.

Bemerkung

Die symmetrische Aufteilung des Faktors $1/\sqrt{2\pi}$ ist nicht zwingend; es gibt ebenso die Möglichkeit der Konvention

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \ldots \qquad \text{und} \qquad \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \ldots$$

oder

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \ldots \qquad \text{und} \qquad \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \ldots$$

Ob die Fouriertransformierte als Integral über $\exp(-i\omega t)$ oder $\exp(i\omega t)$ definiert wird, kann auch von Autor zu Autor variieren. Man kann sich diese Freiheit klarmachen, indem man Gl. (1.13) in Gl. (1.12) einsetzt:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \exp(i\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \exp(-i\omega t') f(t') \tag{1.20}$$

Diese Beziehung heißt Fourierintegraltheorem. Durch die Substitution $\omega = -\omega'$ kann man es auch in die Form

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \, \exp(-i\omega' t) \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \exp(i\omega' t') f(t') \tag{1.21}$$

bringen, sodass klar wird, dass alle vorher genannten Konventionen für die Fouriertransformierte gleichberechtigt sind.

Fouriertransformation in mehreren Dimensionen

Bisher haben wir nur die Fouriertransformation von der Zeit- zur Frequenzachse und zurück betrachtet; wir können die Fouriertransformation auch im dreidimensionalen Ortsraum durchführen. Die Fouriertransformation von $f(x, y, z)$ ist definiert als

$$\tilde{f}(k_x, k_y, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dx \, e^{-ik_x x} \int dy \, e^{-ik_y y} \int dz \, e^{-ik_z z} f(x, y, z) \tag{1.22}$$

Die inverse Transformation lautet

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dk_x \, e^{ik_x x} \int dk_y \, e^{ik_y y} \int dk_z \, e^{ik_z z} \tilde{f}(k_x, k_y, k_z) \tag{1.23}$$

Das lässt sich kompakter schreiben als

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{x}) \tag{1.24}$$

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{f}(\vec{k}) \tag{1.25}$$

wobei die Integrale über den gesamten Orts- oder Wellenvektorraum ($\vec{k}$-Raum) laufen. Je nach Art der Funktionen $f(\vec{x})$ und $\tilde{f}(\vec{k})$ bieten sich andere als kartesische Koordinaten bei der Berechnung der Integrale an. In Gleichung (1.25) können wir die Entwicklung der Funktion $f(\vec{x})$ in ebene Wellen aus Kap. 0.3 wiedererkennen, mit $\tilde{f}(\vec{k})$ als Amplitude der Wellen $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$.

Fouriertransformation von Ableitungen

Wir bilden, analog zur Fouriertransformation von $f(t)$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, f(t) e^{-i\omega t} \tag{1.26}$$

die Fouriertransformation der Ableitung $\frac{df(t)}{dt}$

$$\tilde{f}_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, \frac{df(t)}{dt} e^{-i\omega t} \tag{1.27}$$

und erhalten durch partielle Integration

$$\tilde{f}_1(\omega) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, f(t)(-i\omega) e^{-i\omega t} = i\omega \tilde{f}(\omega) \tag{1.28}$$

wobei wir annehmen konnten, daß $f(t) \to 0$ für $t \to \pm\infty$ (das ist Voraussetzung für die Existenz der Fouriertransformation, denn sonst wäre $f(t)$ nicht quadratintegrabel). Die gefundene Beziehung lässt sich leicht auf die l-te Ableitung verallgemeinern,

$$\tilde{f}_l(\omega) = (i\omega)^l \tilde{f}(\omega) \,, \tag{1.29}$$

vorausgesetzt, daß alle integrierten Terme für $t \to \pm\infty$ veschwinden. Diese Beziehung macht die Fouriertransformation nützlich bei der Lösung von Differentialgleichungen. Die Ableitung ist durch eine Multiplikation in ω-Raum ersetzt worden.

Fouriertransformation einer Differentialgleichung

Wir betrachten die Differentialgleichung einer erzwungenen Schwingung

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) \tag{1.30}$$

$x(t)$ ist die Auslenkung aus der Ruhelage als Funktion der Zeit und $f(t)$ ist die treibende Kraft; gedämpft wird die Schwingung durch eine geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft, und b ist proportional zur Stärke der Rückstellkraft. Wir stellen nun die Auslenkung durch ihre Fouriertransformation dar:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega t} \tilde{x}(\omega) \tag{1.31}$$

Nun Fouriertransformieren wir die Differentialgleichung (1.30):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} (\ddot{x} + a\dot{x} + bx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} f(t) \tag{1.32}$$

$$\curvearrowright (i\omega)^2 \tilde{x}(\omega) + (i\omega) a\tilde{x}(\omega) + b\tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega) \tag{1.33}$$

$$\curvearrowright \tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{-\omega^2 + ai\omega + b} \tag{1.34}$$

Wir transformieren $\tilde{x}(\omega)$ zurück auf die Zeitachse:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega t} \tilde{x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega)}{b + ai\omega - \omega^2} \tag{1.35}$$

Für eine gegebene treibende Kraft $f(t)$ und damit ihrer Fouriertransformierten $\tilde{f}(\omega)$ müssen wir also nur noch das Integral (1.35) ausführen, wozu allerdings etwas Funktionentheorie erforderlich ist.

Fouriertransformation als Beispiel einer Integraltransformation

Die Fouriertransformation ist nur ein Vertreter einer allgemeineren Transformation, der Integraltransformation

$$\tilde{f}(\alpha) = \int_a^b dt\, K(\alpha, t) f(t) \tag{1.36}$$

wobei $\tilde{f}(\alpha)$ die Transformation von $f(t)$ bezüglich des Kerns $K(\alpha, t)$ ist, und α ist die Transformationsvariable. Zum Beispiel ist die Laplacetransformation definiert durch $K(\alpha, t) = e^{-\alpha t}$, $a = 0$, $b = \infty$:

$$\tilde{f}(\alpha) = \int_0^{\infty} dt\, e^{-\alpha t} f(t) \tag{1.37}$$

Die Laplacetransformation kann wichtig werden, wenn die Fouriertransformation nicht existiert, z. B. weil $f(t)$ nicht gegen null geht für $t \to \infty$. Für die Umkehrung der Laplacetransformation sind Kurvenintegrale in der komplexen Ebene (Funktionentheorie) erforderlich. Allerdings sind viele Laplacetransformationspaare tabelliert. Die Laplacetransformation verwandelt ebenso wie die Fouriertransformation Ableitungen in Multiplikationen und eignet sich daher ebenfalls zur Vereinfachung oder Lösung von Differentialgleichungen.

1.3 δ-Distribution

Die Fouriertransformation (1.12), (1.13) führt auf das folgende mathematische Problem: Setzt man Gl. (1.13) in (1.12) ein, so muss (nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t') \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \exp\big(i\omega(t-t')\big) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t')\delta(t-t') \tag{1.38}$$

mit

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \exp(-i\omega(t-t')) \tag{1.39}$$

für beliebige quadratintegrable Funktionen $f(t)$ gelten. Die hier eingeführte Größe $\delta(t-t')$ ist offensichtlich keine gewöhnliche Funktion, sondern eine *Distribution*, die streng genommen nicht für sich alleine stehen darf, sondern nur in Verbindung mit der Integration in (1.38) erklärt ist. Die grundlegende Beziehung für $\delta(t)$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\delta(t) = f(0) \tag{1.40}$$

Das bedeutet eine Verallgemeinerung des Begriffs der Funktion $f(x)$, die jedem $x \in \mathbb{R}$ einen Wert zuweist; stattdessen weist eine Distribution $f(x)$ der Größe $\int dx\, f(x)g(x)$ für jede geeignet gewählte Testfunktion $g(x)$ einen Wert zu.

Darstellungen

Die δ-Distribution, als deren Definition wir im folgenden Gl. (1.38) betrachten wollen, kann durch jede Folge stetiger Funktionen δ_n, für die

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t')\delta_n(t-t') = f(t) \tag{1.41}$$

gilt, dargestellt werden. Beispiele:

1.) Rechteck

$$\delta_n(t) = n \quad \text{für} \quad |t| < \frac{1}{2n}; \qquad \delta_n(t) = 0 \quad \text{sonst.} \tag{1.42}$$

2.) Gauß-Funktion („Glockenkurve“)

$$\delta_n(t) = n \exp(-\pi t^2 n^2). \tag{1.43}$$

3.) Die Darstellung

$$\delta_n(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(nt)}{t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} d\omega \, \exp(i\omega t) \tag{1.44}$$

führt gerade auf die Schreibweise (1.39).

Vorsicht: Die Gleichungen (1.41) - (1.44) sind so zu verstehen, dass die t'-Integration vor der Limes-Bildung $n \to \infty$ auszuführen ist!

Rechenregeln

1.) $\delta(t) = \delta(-t)$

2.) $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

Beweis:

a) Fall $a > 0$: Für beliebige Funktionen $f(t)$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\delta(at) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f\left(\frac{t'}{a}\right)\delta(t') = \frac{f(0)}{a} = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\frac{\delta(t)}{a}$$

wobei wir $t' = at$ substitutiert haben. Durch Vergleich der Integranden folgt die Behauptung.

b) Fall $a = -b < 0$: Wiederum gilt für beliebiges $f(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\delta(at) = \frac{1}{-b}\int_{\infty}^{-\infty} dt'\, f\left(\frac{t'}{-b}\right)\delta(t') = \frac{f(0)}{b} = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\frac{\delta(t)}{|a|}$$

wobei wir $t' = at = -bt$ subsitutiert haben. Beide Fälle zusammen ergeben obige Beziehung.

3.) $\delta(t^2 - a^2) = \dfrac{\delta(t+a) + \delta(t-a)}{2|a|}; \qquad a \neq 0\,.$

Dies ist ein Spezialfall der allgemeineren Beziehung

$$\delta\big(h(t)\big) = \sum_i \frac{\delta(t - t_i)}{|h'(t_i)|}$$

wobei t_i die Nullstellen der Funktion $h(t)$ sind.

4.) Ableitung der Deltafunktion $\delta'(t)$

Man findet

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\delta'(t) = \big[f(t)\delta(t)\big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f'(t)\delta(t) = -f'(0)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f'(t)\delta(t)$$

Allgemein gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\delta^{(n)}(t) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f^{(n)}(t)\delta(t)\,; \tag{1.45}$$

d.h. die δ-Distribution ist (beliebig oft) differenzierbar, vorausgesetzt, dass f (beliebig oft) differenzierbar ist. Die Ableitung wird von der Deltafunktion also abgewälzt auf die Funktion $f(t)$, mit der die Deltafunktion unter dem Integral steht.

5.) Heaviside-Funktion

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Es gilt $\theta'(t) = \delta(t)$, denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\theta'(t) = \big[f(t)\theta(t)\big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f'(t)\theta(t) = f(\infty) - \int_{0}^{\infty} dt\, f'(t)$$
$$= f(\infty) - \big[f(t)\big]_0^{\infty} = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\delta(t)$$